

Pedro López García, \* Denisse Argote Espino \*\*

## **Lógica difusa: un método de clasificación de materiales arqueológicos**

Se presentan los fundamentos teóricos y prácticos de un método de clasificación basado en la lógica difusa, el cual puede ser aplicado a una variedad de materiales arqueológicos. Este método puede ser utilizado en combinación con la información obtenida a través de una clasificación hecha por el sistema tipo-variedad, en el cual el uso de variables lingüísticas es normal. Dos ejemplos ilustran la aplicación del método, y los resultados obtenidos se comparan con los que se obtendrían por medio de métodos basados en matrices de similitud, como en el caso del análisis de conglomerados. Por último, se pone mayor énfasis en la utilización de medidas de validación para la determinación del número óptimo de cúmulos a obtener en una clasificación que utiliza algoritmos de lógica difusa.

This article presents the theoretical and practical foundations of a classification method based on fuzzy logic, which can be applied to a variety of archaeological materials. This method can be used in combination with data obtained from a type-variety classification system, in which the use of linguistic variables is common. Two examples are used to illustrate this method, and their results are compared with those that would have been obtained with other methods based on similarity matrices, like in the case of cluster analysis. Special attention is given to the use of validity measurements for the determination of the optimal number of clusters to be obtained in a classification based on fuzzy logic algorithms.

La clasificación de objetos ha jugado un papel preponderante en la investigación arqueológica desde hace varias décadas. Debido a las diferencias significativas que existen en las aproximaciones para clasificar los materiales arqueológicos, ha surgido lo que se conoce como debate tipológico entre las clasificaciones hechas por arqueólogos del Viejo Continente y los del Nuevo Mundo. En este debate se ha puesto de manifiesto la importancia relacionada con la naturaleza y el reconocimiento de tipos a partir de una clasificación, donde por *clasificación* se entiende “simplemente una extensión del reconocimiento de diferencias y similitudes entre los datos. Esos materiales, eventos o procesos, que son más similares que diferentes de acuerdo al clasificador, son colocados juntos en una clase” (Hill y Evans, 1972: 232).

Uno de los principales expositores de la arqueología tradicional europea fue Gordon Childe, y cuya metodología en su totalidad se encuentra plasmada en su libro *Piecing Together the Past* (Childe, 1956). Él concretó dos niveles taxonó-

\* Escuela Nacional de Antropología e Historia, INAH [dplopez@prodigy.net.mx].

\*\* Departamento de Geoquímica, Instituto de Geología-UNAM [efenfi@yahoo.com].

micos básicos, ‘culturas’ y ‘tipos’, ambos integrados en la siguiente definición: “la cultura es un conjunto recurrente de tipos arqueológicos” (Childe, 1956: 15). Añadió, además, que los tipos se hallaban repetidamente asociados, debido a que eran el resultado de un patrón de comportamiento estandarizado procedente de una misma sociedad. De esta forma relacionaba los objetos con las personas.

Childe postuló que a partir de los datos se forman los tipos y que éstos, a su vez, dan origen al concepto de cultura, y esta última genera el concepto de etnia o grupo social. La definición de tipo de Childe resultó ser menos incisiva al no mencionar en absoluto los ‘rasgos’, que describen o identifican a los tipos, ni los elementos diagnósticos (Doran y Hodson, 1975). A pesar de que la metodología taxonómica que manejaba no era matemática, sí consideraba la necesidad de introducir algún elemento cuantitativo a su definición de cultura (clase).

Por otro lado, para el nuevo continente se tiene la aproximación a la clasificación propuesta por Rouse, la cual difiere ampliamente de la propuesta por Childe. Por ejemplo, Rouse cambia el énfasis de agrupar unidades para agrupar atributos, donde un *tipo* es un grupo diagnóstico de atributos que caracterizan a una clase (Rouse, 1960). Además introdujo el término de *modo*, el cual define como “cualquier patrón, concepto o costumbre que gobierne la conducta de los artesanos de una comunidad, transmitiéndose de generación en generación, pudiendo pasar incluso de comunidad en comunidad a grandes distancias (...) Estos se verán reflejados en los artefactos como atributos” (Rouse, 1960: 313). Con base a esto diferenció entre dos tipos de clasificación de materiales arqueológicos: la clasificación analítica y la clasificación taxonómica. El primer caso tiene que ver con el establecimiento de modos y el segundo con el establecimiento de tipos.

Los modos pueden ser conceptuales, definiendo el material, forma y decoración utilizados por el artesano. Los atributos indicativos de tipos deben ser escogidos por su significado cultural. Si el arqueólogo procede de forma com-

pletamente lógica, hará primero una clasificación analítica para formar los modos y después hará la clasificación taxonómica en término de esos modos, en vez de ir de regreso a los atributos originales (Rouse, 1970). Rouse reconoció que en cualquier colección dada existen diferentes clases de tipos como diferentes clases de modos que pueden ser descubiertos, y que cada uno resulta útil en la obtención de clases particulares de información deseadas por el investigador (Rouse, 1960). También demostró que los modos tienen un significado histórico y que resultan ser de mayor utilidad que los tipos para estudiar la cultura histórica.

Para la década de 1970 la noción de clasificación de artefactos arqueológicos se basó en los principios del análisis tipológico. Una tipología identifica clases de artefactos que exhiben conjuntos de atributos asociados dentro de un contexto de una matriz de coeficiente de similitud. Esta postura dio como origen a un esquema de clasificación conocido comúnmente como análisis de conglomerados o análisis de cúmulos, que tiene como objetivo principal la clasificación de objetos de acuerdo con sus similitudes con el fin de organizar los datos en grupos o tipos (Baxter, 1994; Doran y Hodson, 1975; Hodson, 1970). En términos generales, un cúmulo es un grupo de objetos más similares entre sí que con respecto a los miembros pertenecientes a otros grupos, de acuerdo con una métrica conocida como *similitud*, la cual se expresa en términos matemáticos. La evaluación de los cúmulos (tipos) formados es una etapa crucial en el proceso del análisis de los datos debido a que existe una gran cantidad de métricas para la formación de cúmulos, lo que puede ocasionar que, usando los mismos datos, se puedan obtener diferentes configuraciones.

Si bien los diferentes esquemas de clasificación poseen en común el principio del reconocimiento de atributos para distinguir tipos, las primeras aproximaciones son resultado de la observación directa y son reconocidas como clasificaciones no numéricas, mientras el caso del análisis de cúmulos es resultado del manejo de variables o atributos cualitativos y cuantitativos, así como del manejo de modelos matemáticos, y

es reconocido como análisis numérico. Aun así, este método tiene sus pros y sus contras, tema que se tratará más adelante.

En este artículo se discutirá la importancia de los métodos numéricos de clasificación sobre los métodos tradicionales, presentando los fundamentos teóricos y prácticos que los rigen. Asimismo, se presenta un método numérico de clasificación que opera utilizando los principios de la lógica difusa (*fuzzy logic*), con el cual se pueden obtener mejores resultados que con otros procedimientos también de tipo numérico. Se trabajará con dos ejemplos, uno de datos sintéticos y otro de datos reales (ambos publicados), con el fin de ilustrar la aplicación del método y poder comparar los resultados obtenidos por nosotros con los resultados publicados por otros autores que han utilizado los mismos ejemplos para aplicar sus propias técnicas.

### Análisis de conglomerados

En la actualidad, el análisis de cúmulos o de conglomerados se puede dividir en dos grupos principales: *a)* la formación de grupos mediante técnicas de agrupamiento rígidas y *b)* la formación de grupos mediante técnicas de agrupamiento de lógica difusa.

Un conjunto rígido divide al universo de posibilidades en dos grupos: los que pertenecen al conjunto y los que no pertenecen. El objetivo es hallar cúmulos o grupos en los datos minimizando la variación interna de los mismos y maximizando la variación externa entre grupos. Las técnicas rígidas de análisis de conglomerados pueden ser jerárquicas, donde la clasificación resultante tendrá un número creciente de clases anidadas, o no jerárquicas cuando el número de grupos es seleccionado por el usuario —por ejemplo, el agrupamiento *k-means* y el agrupamiento *k-medios*.

La teoría de conjuntos difusos ha sido ampliamente estudiada durante los últimos 30 años. La mayor parte de su interés inicial se enfocaba en la representación de la incertidumbre de los procesos cognitivos humanos (Zadeh, 1965), pero con el tiempo esta teoría ha podido

aplicarse con éxito en áreas tan diferentes como la segmentación de imágenes (Sutton *et al.*, 2000), los estudios de sistemas litológicos (Hsieg *et al.*, 2005), la teoría de conjuntos difusos (Kandel, 1986; Kaufmann y Gupta, 1988), las investigaciones operativas para toma de decisiones multi-objetivo *fuzzy* (Lai y Hwang, 1994; Zimmermann, 1983) y modelos de decisión en investigaciones operativas (Liu y Shi, 1993; Zimmermann, 2000).

En el desarrollo de sistemas que intentan modelar la toma de decisiones humanas se ha reconocido la necesidad de tratar con la incertidumbre.<sup>1</sup> Existen algunos dominios del problema que no pueden ser entendidos naturalmente en términos precisos o rígidos, y entre ellos se encuentran los sistemas políticos, los económicos o los sociales. Una característica de los sistemas humanos es que la toma de decisiones y los juicios deben tomar lugar en un clima de incertidumbre, por eso no es suficiente utilizar un lenguaje matemático clásico basado en características dicotómicas de la teoría de conjuntos. Lofty A. Zadeh, quien definió el principio de incompatibilidad, dice que a medida que la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta un punto donde la precisión y el significado son características excluyentes (Zadeh, 1973: 28).

La lógica clásica o booleana es puramente binaria y apareció en un principio como la herramienta matemática más potente para modelar agrupamientos y discriminaciones. En el álgebra de Boole, un elemento está o no está contenido en un conjunto dado; es decir, la transición de membresía a la no membresía es abrupta. La lógica difusa se basó en extender la lógica clásica al estudio de la lógica multivalente, y se contempló inicialmente desde la perspectiva del manejo de la incertidumbre y la vaguedad en los términos. La lógica difusa ofrece un modelo de la percepción clasificadora del universo gracias a la posibilidad de permitir la atribución

<sup>1</sup> Incertidumbre es definida en sentido de vaguedad, más que en el de falta de conocimiento en el valor del parámetro.

de un objeto a varias clases en el grado en que sea necesario, confiriéndole grados de elasticidad a los grupos (Zimmermann, 1996). De hecho, el manejo de la indefinición entre clases es presentada por Zadeh (1965) como la principal motivación al introducir la noción de conjunto difuso, donde no todos los conceptos son booleanos.

En el concepto de conjunto difuso reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números, sino etiquetas lingüísticas. La lógica difusa permite representar el conocimiento humano, que es mayoritariamente de tipo lingüístico-cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático mediante la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a éstos. Una variable lingüística hace referencia a una magnitud que toma sus valores en un espacio continuo o discreto —por ejemplo, la recta real  $R$ , o bien un subconjunto de la misma—. Además, en el caso de variables lingüísticas, el espacio donde la magnitud toma valores está fraccionado, de modo que cada intervalo de la partición se corresponde aproximadamente con un adjetivo que usamos en la vida diaria para calificar la magnitud descrita.

Por ejemplo, si vemos el acabado de superficie de un tiesto como una variable, los valores rojo, negro o café pueden ser interpretados como niveles de subconjuntos difusos del universo de tiestos. En este sentido, el atributo color es una variable difusa, una variable cuyos valores nominales son conjuntos difusos (Zadeh, 1973). De igual forma, una magnitud cualquiera puede verse como una variable lingüística cuyos valores son conjuntos difusos definidos en términos nominales; por ejemplo, la estatura de una persona puede describirse como una variable lingüística si se usan como categorías las variables muy alto, alto, no muy alto, etcétera, o bien describir a la altura en términos mensurables, ya sea en centímetros o metros.

La función principal de las variables lingüísticas es proporcionar un medio sistemático para una caracterización aproximada de un fenómeno complejo (Zade, *op. cit.*). Por ello la organización de una colección de objetos en forma de

grupos tiene que sobrepasar la idea de clasificación puramente lógica y estricta. La lógica difusa ofrece un modelo de la percepción clasificadora del universo gracias al hecho de permitir la atribución de un objeto a tantas clases y en el grado que sea necesario.

En los enfoques de modelado basados en la teoría de conjuntos difusos es necesario decidir el tipo de función de pertenencia que caracteriza a los conjuntos difusos que caracterizan la posible incertidumbre presente en el problema modelado, así como la función distintiva que se encargará de discriminar los cúmulos. La función característica resulta ser el componente crucial de un conjunto difuso, concepto sugerido por Zadeh y que constituye un armazón consistente de la teoría de conjuntos difusos. De esta manera se tiene que la función característica de un conjunto difuso  $A$  tiene asociada una *función de pertenencia* con dominio  $X$  (normalmente  $X$  se conoce como *universo de discurso*) y rango  $[0,1]$  ( $\mu_A(x) \rightarrow [0,1]$ ). Así, el conjunto difuso  $A$  queda definido como una colección de pares ordenados

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (1)$$

La función de pertenencia expresada en (1) tiene la ventaja de poder tomar cualquier valor dentro del intervalo continuo  $[0,1]$ . De esta manera, un valor igual a 0 representa la no-pertenencia al conjunto  $A$  y un valor igual a 1 representa la pertenencia total a dicho conjunto. Valores dentro del rango 0,1 implican un grado de pertenencia intermedio. Por tanto, el problema que se plantea es el de determinar la correspondiente función  $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$  dado un predicado  $A$  sobre un universo  $U$ , ya que tal función no es única y depende del contexto y de quien la construya.

Con los sistemas basados en la lógica difusa se puede evaluar una mayor cantidad de variables, simulando el conocimiento humano. Es aquí donde la noción de algoritmo difuso juega un papel importante para caracterizar la aproximación de los conceptos difusos y sus interrelaciones. Esencialmente, un algoritmo difuso es una secuencia ordenada de instrucciones (si-

milar a un programa de computadora), y donde algunas de ellas pueden contener etiquetas de conjuntos difusos (Zadeh, 1973). Cabe señalar que en la ejecución de los métodos de agrupamiento se pueden identificar tres factores que afectan la influencia de los resultados: 1) la presencia de *outliers* o puntos aberrantes, 2) el grado de traslape de los grupos y (3) la elección de las medidas de similitud.

### Agrupamientos con lógica difusa

En este trabajo se hace mayor énfasis en el algoritmo conocido como *Fuzzy c-means* (Bezdek, 1981), el cual se basa en la minimización de una función objetivo. Se parte del hecho de considerar que los tipos no son entidades discretas con límites bien definidos, sino entidades con transiciones o traslapes. Estos grupos transicionales pueden demostrar que los conjuntos de artefactos o tipos no desaparecen abruptamente en el tiempo, sino que su desaparición puede ser gradual, dando con ello origen a los nuevos tipos.

El algoritmo de agrupamiento *fuzzy c-means* (o FCM) se basa en la minimización de una función objetivo llamada función *c-means*, la cual se define como:

$$J(X; U, V) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m \|x_k - v_i\|_m^2 \quad (2)$$

donde  $X$  es un conjunto finito de elementos  $[x_1, x_2, \dots, x_N]$  y  $V$  es un vector de prototipos de grupo o centroides que deben ser determinados

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_c], v_i \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

y  $\|x_k - v_i\|_m^2$  es una norma de distancia del producto interno al cuadrado

$$\|x_k - v_i\|_m^2 = D_{i,k}^2 = (x_k - v_i)^T (x_k - v_i) \quad (4)$$

Estadísticamente (2) puede ser vista como una medida de la variación total de  $x_k$  a partir de  $v_i$ . La minimización de la función *c-medias* representa un problema de optimización no li-

neal que puede ser resuelto por medio de una simple iteración de Picard, con condicionamientos de primer orden para los puntos estacionarios de la función (4). Los puntos estacionarios de la función objetivo (2) pueden encontrarse al aplicar la restricción (2) a  $J$  por medio de multiplicadores de Lagrange:

$$\bar{J}(X; U, V, \lambda) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^c \lambda_i \left( \sum_{k=1}^N \mu_{ik} - 1 \right) \quad (5)$$

y estableciendo los gradientes de  $\bar{J}$ , con respecto a  $U$ ,  $V$  y  $\lambda$ , a cero. Si  $D_{i,k}^2 > \forall v_i$ ,  $k$  y  $m > 1$ , entonces  $(U, V) \in M_{fc} \times \mathbb{R}^{n \times c}$  puede minimizar a (4) sólo si

$$\mu_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c (D_{j,k} / D_{i,k})^{2/m}}, \quad 1 \leq i \leq c, 1 \leq k \leq N \quad (6)$$

y

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_{ik} x_k}{\sum_{k=1}^N \mu_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (7)$$

donde  $v_i$  es el promedio ponderado de los objetos que pertenecen a un grupo, siendo los pesos igual a los grados de membresía. Cabe notar que el algoritmo FCM hace sus cálculos con la norma de la distancia euclidiana estándar, que induce cúmulos hiperesféricos y, por ello, sólo puede detectar cúmulos con la misma forma y orientación.

### Validación del método

Uno de los problemas de los algoritmos de agrupamiento difuso consiste en determinar el número óptimo de cúmulos. Si  $c$  (número de cúmulos) es desconocido, la determinación de un  $c$  óptimo se vuelve un criterio importante. La estrategia para enfrentar este tipo de problema es utilizar medidas de validación, las cuales evalúan la bondad del ajuste de los datos observados al modelo; es decir, si una determinada partición difusa ajusta a todos los datos.

Esto se debe a que si bien el algoritmo de agrupamiento siempre trata de encontrar el mejor ajuste para un número fijo de cúmulos, podrían estar equivocados o no corresponder a los grupos de los datos reales. Para ello existen varios algoritmos de validación que automáticamente pueden optimizar el número de cúmulos. En este trabajo se utilizaron seis diferentes algoritmos de validación: el coeficiente de partición (CP), el índice de partición (SC), el índice de separación (IS), el índice de Xie y Beni (IXB), el índice de Dunn (ID) y el índice de Dunn alternativo (IDA).

El coeficiente de partición (CP) mide la cantidad de “traslape” entre cúmulos y es definido por Bezdek (1981) como:

$$CP(c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N (\mu_{ij})^2 \quad (8)$$

donde  $\mu_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, c$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$ ) es la membresía del punto dato  $j$  en el cúmulo  $c$ . La desventaja del CP es su decreciente monotónicamente y la falta de conexión directa con alguna propiedad de los datos, como sería asumir una densidad constante de los datos en los cúmulos.

El índice de partición (SC) es el cociente de la suma de la compactación y separación de los cúmulos. Se entiende como la suma de las medidas de validación de cúmulos individuales, normalizada a través de la división por la posición difusa de cada cúmulo:

$$SC(c) = \sum_{i=1}^c \frac{\sum_{j=1}^N (\mu_{ij})^m \|x_j - v_i\|^{-2}}{N_i \sum_{k=1}^c \|v_k - v_i\|^{-2}} \quad (9)$$

donde  $N$  es el total de datos,  $k$  es el número de datos en cada cúmulo,  $x$  es cada uno de los objetos y  $v$  es el vector. El SC resulta ser útil cuando se comparan diferentes particiones que tienen igual número de cúmulos. Un valor bajo de SC indica una mejor partición.

El índice de separación (S) da prioridad a la separación entre cúmulos y a la cohesión entre los mismos. Si este índice es pequeño, signifi-

ca que se encontró una partición del espacio más compacta y separada, y se define como:

$$S(c) = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N (\mu_{ij})^2 \|x_j - v_i\|^2}{N \min_{i,k} \|v_k - v_i\|^2} \quad (10)$$

El índice de Xie y Beni (XB; Xie y Beni, 1991) ayuda a cuantificar el cociente de la variación total dentro de cúmulos, así como la separación entre los cúmulos, y esta dado por:

$$XB(c) = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N (\mu_{ij})^m \|x_j - v_i\|^2}{N \min_{i,k} \|x_i - v_i\|^2} \quad (11)$$

El número óptimo de cúmulos deberá minimizar el valor del índice. Nótese que la única diferencia entre SC, S y XB está en la aproximación de la separación de los cúmulos.

El índice de Dunn (ID) originalmente fue propuesto para la identificación de cúmulos compactos y bien diferenciados. De esta manera, el resultado del agrupamiento tiene que ser recalculado como el de una partición rígida:

$$ID(c) = \frac{\min_{i \neq j} \{ \min_{x \in C_i} \max_{y \in C_j} d(x,y) \}}{\max_{i \neq j} \{ \max_{x \in C_i} \max_{y \in C_j} d(x,y) \}} \quad (12)$$

donde  $d(x,y)$  es la norma de la distancia euclidiana entre todos los datos.

El índice de Dunn alternativo (IDA) simplifica los cálculos del índice original de Dunn, y está dada por:

$$IDA(c) = \frac{\min_{i \neq j} \{ \min_{x \in C_i} \max_{y \in C_j} d(x,y) \}}{\max_{i \neq j} \{ \max_{x \in C_i} \|x - v_j\| \}} \quad (13)$$

donde la función de disimilitud entre dos cúmulos  $\min_{x \in C_i, y \in C_j} d(x,y)$  está en razón del valor por debajo de la desigualdad del triángulo

$$d(x,y) \geq |d(y, v_j) - d(x, v_j)| \quad (14)$$

siendo  $v_j$  el centroide del  $j$ -ésimo cúmulo.

## Estudios de caso

Para ilustrar los dos tipos de clasificaciones numéricas descritos en la sección anterior (agrupamiento rígido y agrupamiento difuso), y la manera como pueden actuar en un problema de clasificación arqueológico, se retoman dos ejemplos de la literatura: uno sintético y uno real. El primero corresponde a un caso hipotético publicado por Kaufman y Rousseeuw (1990), el cual se refiere a la discriminación de 22 objetos; el segundo ejemplo analiza los datos publicados por Doran y Hodson (1975) sobre la clasificación de 30 broches de la Edad de Hierro provenientes del cementerio de Münsingen, en Suiza. Se seleccionaron estos dos ejemplos por corresponder a casos ampliamente utilizados para la aplicación de diversos algoritmos de clasificación numérica propuestos por diversos autores en distintos momentos, y se contrastaron con resultados obtenidos por otros investigadores (Kaufman y Rousseeuw, 1990; Digby, 1985; Hodson, 1970; Kendall, 1971; Doran, 1971). Los algoritmos utilizados para el análisis de lógica difusa de estos datos se realizaron con base en los programas escritos por Balasko *et al.* (2007) en su *toolkit* de lógica difusa para Matlab.

### Ejemplo 1

En este ejemplo se presenta la siguiente problemática. Considérese la fig.1, donde se presenta la distribución de 22 objetos hipotéticos en un espacio bidimensional, cuyas coordenadas aparecen en la fig. 2. A primera vista se observa en el gráfico la tendencia de los puntos a formar tres grupos compactos bien diferenciados, con dos objetos aislados entre los grupos. Si se utiliza un método de agrupamiento cualquiera para realizar la clasificación de los 22 objetos, el problema radicaría en la decisión que tomaría el algoritmo para asignar al objeto 6 en el grupo formado por los objetos (1, 2, 3, 4, 5) o en el grupo formado por los objetos (7, 8, 9, 10, 11, 12), ya que dicho objeto se encuentra a una distancia similar de los dos grupos, o pudiera dejarlo aislado de manera que formara un grupo separado. Por otro lado, el objeto 13 tendría

un problema análogo, pues se encuentra en medio de los tres grupos compactos.

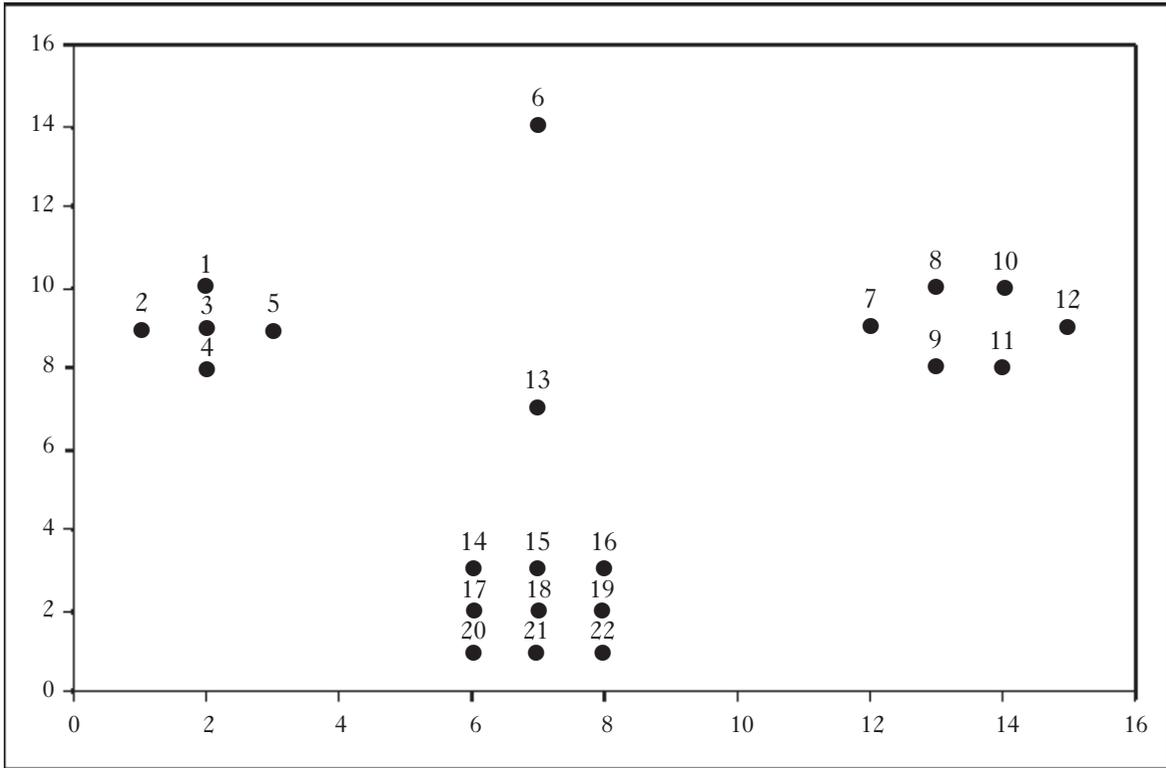
En esta comparación se decidió agrupar los 22 objetos con cuatro métodos de clasificación rígida, tres de los cuales fueron utilizados por Doran y Hodson (1975) en el análisis de los broches de Münsingen. El primer método de agrupamiento fue el de eslabonamiento simple (*single link*), utilizando la distancia euclidiana<sup>2</sup> como métrica para el cálculo de la matriz de similitud entre objetos. Los resultados del agrupamiento pueden verse en el dendograma de la fig. 3, en la que se puede observar la formación de tres grupos principales; sin embargo, el objeto 13 es fusionado primero con el grupo 2 (centro) y luego con el grupo 1 (izquierda), para después ser fusionado con el grupo 3 (derecha). Por otro lado, es claro que el objeto 6 aparece más como un punto aberrante, ya que no queda anidado a ninguno de los tres grupos.

Una medida de validación en los análisis de cúmulos rígidos es el coeficiente de correlación cofenética (CCC). Se usa como un criterio para evaluar el grado de ajuste de la clasificación de un conjunto de datos, midiendo la correlación entre los valores de las distancias calculadas en la construcción del dendograma y la distancia de los datos observados. En otras palabras, este parámetro es una medida de qué tan bien representa un dendograma el espacio multidimensional de los datos utilizando únicamente dos dimensiones. El rango de valores de este coeficiente se encuentra entre [0 y 1], donde  $r = 1$  significa que la concordancia (como una relación lineal) entre los datos originales y el dendograma es perfecta; entre más se aleja  $r$  de 1, menos significativa es esta relación. Dicho coeficiente se expresa de la siguiente manera:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i,j} x_{ij} - (1/n)(\sum_i x_i)(\sum_j y_j)}{\left[ \sum_{i,j} x_{ij}^2 - (1/n)(\sum_i x_i)^2 \right] \left[ \sum_{i,j} y_{ij}^2 - (1/n)(\sum_j y_j)^2 \right]^{1/2}} \quad (15)$$

donde (x) representa la matriz de similitud y (y) representa la matriz de las distancias a las que se formó el dendograma. En este ejemplo

<sup>2</sup> La métrica utilizada en los demás análisis fue igualmente la distancia euclidiana.



● Fig. 1 Representación de 22 objetos hipotéticos en un espacio bidimensional (Kaufman y Rousseeuw, 1990).

Objeto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x	1	2	2	2	37	12	13	13	14	14	15	7	6	7	8	6	7	8	6	7		
y	9	10	9	8	9	14	9	10	8	10	8	9	7	3	3	3	2	2	2	2	2	

● Fig. 2 Coordenadas x y y de los 22 objetos dados por Doran y Hodson (1975).

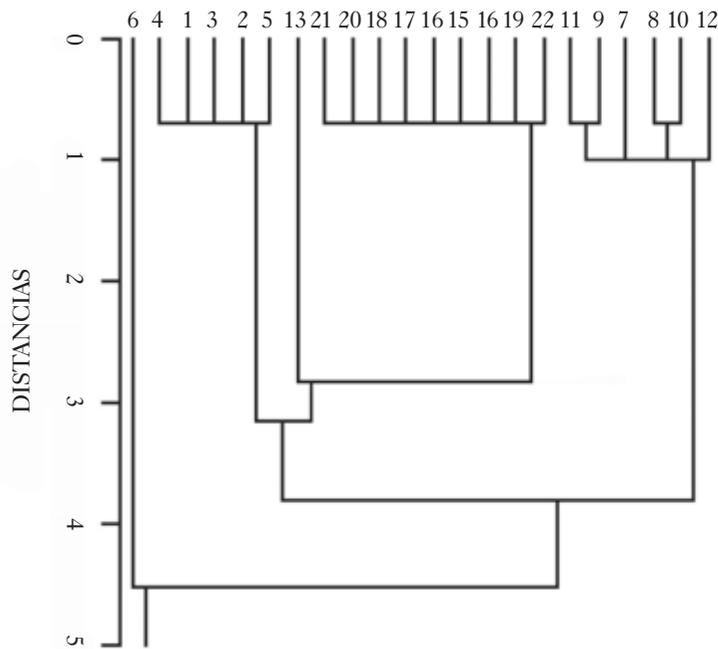
el coeficiente para el método de eslabonamiento simple da  $r = 0.89930$ , valor cercano a 1; de acuerdo con este criterio se podría confirmar que la clasificación es bastante aceptable.

El segundo método utilizado es el de promedios aritméticos sin ponderar de pareja de grupo, cuyo dendograma resultante puede observarse en la fig. 4. Aquí el objeto 13 es fusionado al grupo 1 (izquierda); aunque es claro que no pertenece del todo a este grupo compacto, el algoritmo lo considera más similar a ese grupo que a cualquier otro. De la misma forma, el objeto 6 es fusionado con el grupo 2 (centro), siendo más cercana su similitud a este grupo que a cualquier otro. El CCC resulta ser de  $r = 0.91991$ , cantidad mayor que para el caso ante-

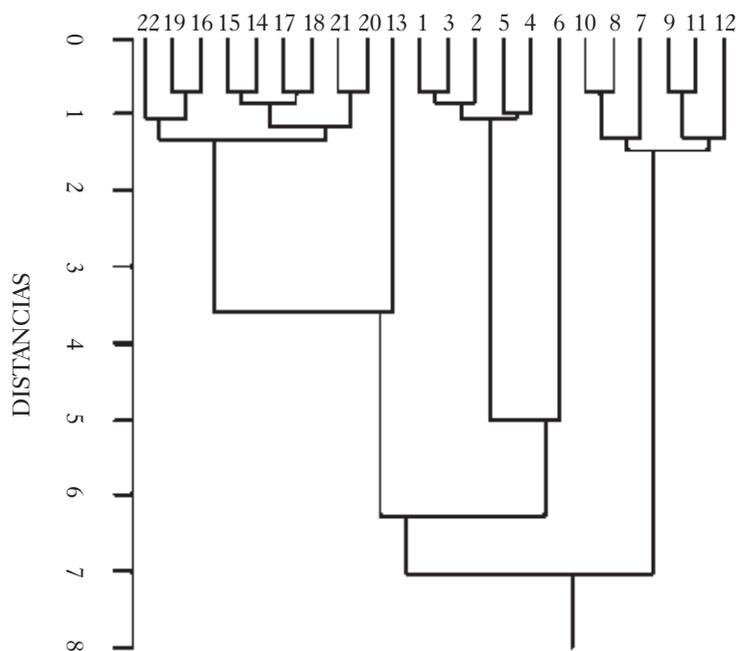
rior, y significa que este arreglo es mejor que el de eslabonamiento simple.

También se aplicó el método de agrupamiento Ward. En el dendograma resultante (fig. 5) se puede apreciar que los objetos 6 y 13 son asignados al grupo 2 (centro), aunque no están incluidos en lo compacto de este grupo; sin embargo, el método los reconoce como parte del mismo. En este caso el CCC resulta ser de  $r = 0.91728$ , valor bastante similar al del caso anterior.

El otro método utilizado en este ejemplo es un método de clasificación no jerárquico conocido como *K-means*. El agrupamiento de *K-means* particiona el conjunto de datos en  $c$  cúmulos mutuamente exclusivos y colectivamente ex-



● Fig. 3 Dendrograma de los 22 objetos utilizando la distancia euclidiana y el método de eslabonamiento simple.



● Fig. 4 Dendrograma de los 22 objetos utilizando la distancia euclidiana y el método de promedios aritméticos sin ponderar de pareja de grupo.

haustivos, de tal forma que los objetos dentro de cada cúmulo son más cercanos entre sí y más lejanos de los objetos contenidos en otros cúmulo-

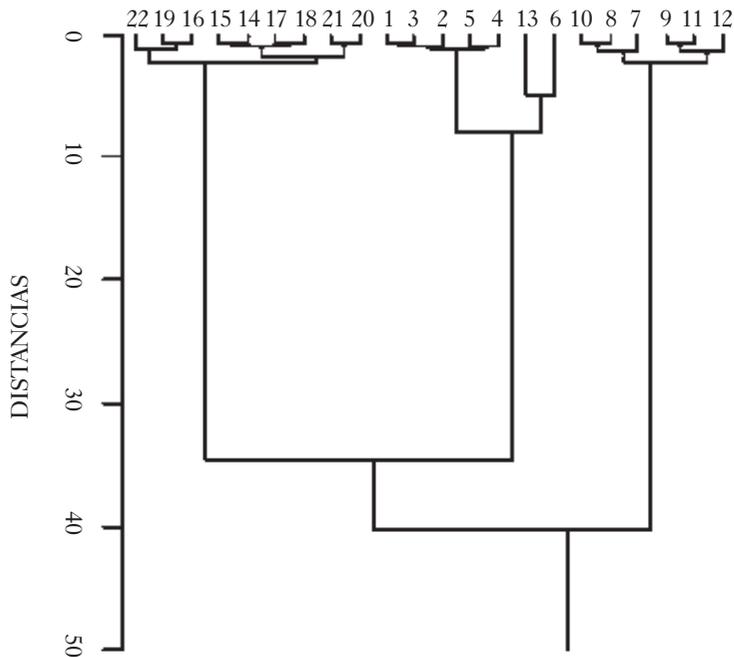
los. *K-means* es un algoritmo iterativo para el que debe especificarse el número de grupos a crear. Cada cúmulo es caracterizado por su centroide y los objetos se van asignando a los grupos de tal forma que la suma de las distancias de cada objeto a su centroide sea mínima. La clasificación de los 22 objetos con el método de *K-means* se puede observar en la fig. 6. En la gráfica se aprecia la formación clara de tres grupos, junto a los objetos 6 y 13 —el círculo negro corresponde al centroide de cada uno de los cúmulos formados—. Los tres grupos principales son bastante compactos y cercanos a sus centroides, pero es claro que los objetos ubicados lejos de los centroides de grupo están mal clasificados (objetos 13 y 6).

Es fácil ver que con los métodos de agrupamiento rígido los datos son forzados a pertenecer a un solo grupo (caso de los objetos 13 y 6), aunque no necesariamente pertenezcan a ese. Cabe remarcar que el espacio analizado en este caso es solamente de dos dimensiones, cuando en la realidad se trabaja con espacios  $n$ -dimensionales y  $n$ -variables, en cuyo caso resulta imposible apreciar con tanta claridad los resultados de una clasificación inadecuada.

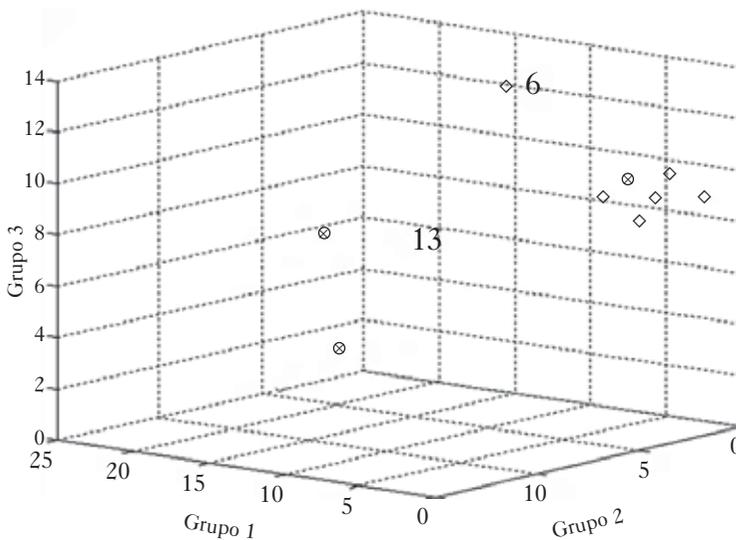
## Ejemplo 2

En la década de 1970 fue publicada la clasificación de una muestra de broches provenientes de un sitio de la Edad de Hierro en Münsingen, Suiza. Los datos de

estos broches fueron el objetode comparación de varias taxonomías y seriaciones establecidas por estudios tradicionales, en los que se han



● Fig. 5 Dendrograma de los 22 objetos utilizando la distancia euclidiana y el método de Ward.



● Fig. 6 Gráfica 3D de la clasificación de los 22 objetos con el método de *K-means*.

dividido los tipos de estos broches en dos o tres grupos mayores; aun cuando se ha intentado subdividir estos tipos mayores, las clasificaciones propuestas han tenido discrepancias y no existe un conjunto detallado de tipos (Doran y Hodson, 1975). Estos broches han sido utilizados para establecer sobre todo categorías a tra-

vés de una clasificación por tipos “estilísticos”, los cuales han servido para detectar cambios de estilo a través del tiempo, así como diferencias en los trabajos regionales (Doran y Hobson, *op. cit.*).

Otras ventajas que presentan estos broches son: 1) que muestran buena variación sobre un amplio rango de atributos, y 2) que su contexto arqueológico estaba asociado con un cementerio estratificado horizontalmente, lo cual proporcionaba una importante fuente de evidencia independiente, esencial para verificar el significado de las otras clasificación propuestas: “(...) la muestra seleccionada representa el problema de hallar uno o más niveles a los cuales definir grupos o tipos con propósitos descriptivos o heurísticos (...)” (*ibidem*).

Doran y Hodson pusieron a prueba varios métodos de clasificación con los broches de Münsingen, como el de eslabonamiento simple, el de promedios, el eslabonamiento doble y el método de *K-means*. En su estudio se restringieron únicamente a la forma de los broches, excluyendo el tamaño como una base posible para clasificarlos. Reconocieron que sus métodos de agrupamiento fallaron para producir una jerarquía al incrementar gradualmente los grupos formados, lo cual provocó que estos procedimientos no resultaran adecuados en la formación de los mismos. Por ejemplo, el método de agrupamiento del promedio demostró su

incapacidad para proporcionar una taxonomía aceptable, pues terminó con una configuración falsa, y el método de agrupamiento de Double-Linkage produjo el traslape de los cúmulos, por lo que los grupos formados resultaron difíciles de interpretar.



II. Doran y Hodson concluyeron que el método de *K-means* logró encontrar una partición eficiente en la formación de los grupos, siendo útil en la interpretación de la clasificación de los broches.

Si se analiza detalladamente el dendograma de la fig. 7, se puede apreciar que existen al menos tres grupos. Uno de ellos es el formado en la parte izquierda del gráfico e incluye los broches 20 hasta 30, pero éste parece ser un punto aberrante en la clasificación, porque si bien es anidado en el mismo cúmulo, la distancia a la que está agrupado es mayor a la que se anidan los otros broches. Por otra parte, puede verse un segundo cúmulo en la parte central del dendograma que comienza con el broche 10 y termina con el 27. Este cúmulo parece dividirse a su vez en tres subgrupos (broches 10 al 24, del 23 al 19 y del 5 al 27); cabe notar que en este cúmulo no se observan puntos aberrantes. Por último, en la parte derecha del dendograma se localiza un tercer cúmulo, donde hay dos broches forzados a formar parte de este grupo (broches 25 y 29). Si se observan las distancias a que son anidados estos broches, se ve claramente que no forman parte natural del mismo, sino que están incluidos porque sus distancias al centroide de este grupo es menor que la distancia a los centroides de los demás grupos. Ahora bien, si se consideran todos estos resultados, cabría preguntarse cuál sería el número óptimo de cúmulos.

De acuerdo con los resultados un poco ambiguos del ejemplo anterior, se decidió aplicar una clasificación con el algoritmo de lógica difusa. El propósito de ello consiste en obtener una lista de la membresía de pertenencia de cada objeto a cada uno de los grupos formados. Para el ejemplo 1, la clasificación de los 22 objetos con el algoritmo difuso especifica la formación de tres cúmulos —en cuyo caso cada objeto tendrá 3 membresías— y una membresía en cada cúmulo (fig. 8). De acuerdo con las membresías expresadas en porcentajes, se puede observar que los objetos con membresías más altas respecto a un cúmulo más probablemente pertenecen a éste, mientras las membresías bajas expresan que el objeto no posee nada o

muy poco en común con ese cúmulo. Así, el agrupamiento difuso nos dice que el objeto 1 pertenece mayormente al grupo 2, mientras el objeto 13 se encuentra dividido entre los tres grupos. Si se observa el objeto 3, éste pertenece en más de 99.5% al grupo 2, sólo 0.24% al grupo 3 y 0.015% al grupo 1. Junto al objeto se encuentra un grupo formado por los objetos 1, 2, 4 y 5. El siguiente grupo esta dado por los objetos 7, 8, 9, 10, 11 y 12, cuyas membresías son altas con respecto al grupo 1, mientras los objetos 14 al 22 tienen una fuerte asociación de pertenencia con el grupo 3.

Los objetos restantes (6 y 13) representan aquí un dato importante. El objeto 6 presenta una membresía de 49.8% en el grupo 2, de

<i>Membresías de cada cúmulo</i>			
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	0.012793	0.96597	0.021236
2	0.0071322	0.98344	0.0094292
3	0.0015622	0.99595	0.0024891
4	0.01332	0.96035	0.026328
5	0.0037288	0.99071	0.0055613
6	0.35504	0.49875	0.14621
7	0.96225	0.017541	0.02021
8	0.98162	0.0089827	0.0093955
9	0.96869	0.012547	0.018768
10	0.97781	0.010482	0.011708
11	0.96609	0.013421	0.02049
12	0.95875	0.017672	0.023579
13	0.23327	0.39055	0.37617
14	0.0189	0.031744	0.94936
15	0.01079	0.013617	0.97559
16	0.025566	0.024006	0.95043
17	0.0089072	0.013646	0.97745
18	0.0001486	0.0001797	0.99967
19	0.011459	0.010852	0.97769
20	0.018035	0.025702	0.95626
21	0.012083	0.01413	0.97379
22	0.022363	0.02133	0.95631

● Fig. 8 Agrupamiento *fuzzy* del ejemplo tomado de Kaufman y Rousseeuw (1990).

35.5% en el grupo 1 y de 14.6% en el grupo 3, lo cual significa que este objeto no posee una membresía de pertenencia dominante a un grupo dado, sino que se encuentra entre los grupos 1 y 2 más que en el grupo 3. Con base en ello se puede inferir que este objeto representa un puente entre el grupo 1 y el grupo 2 (Kaufman y Rousseeuw, 1990). Por otro lado, el objeto 13 resulta el más difícil de clasificar, pues tiene una posición intermedia entre los tres grupos, aunque menos favorable para el grupo 1; la membresía refleja este hecho, y muestra que el objeto se encuentra inmerso en los tres grupos y es parte de cada uno de ellos (fig. 9).

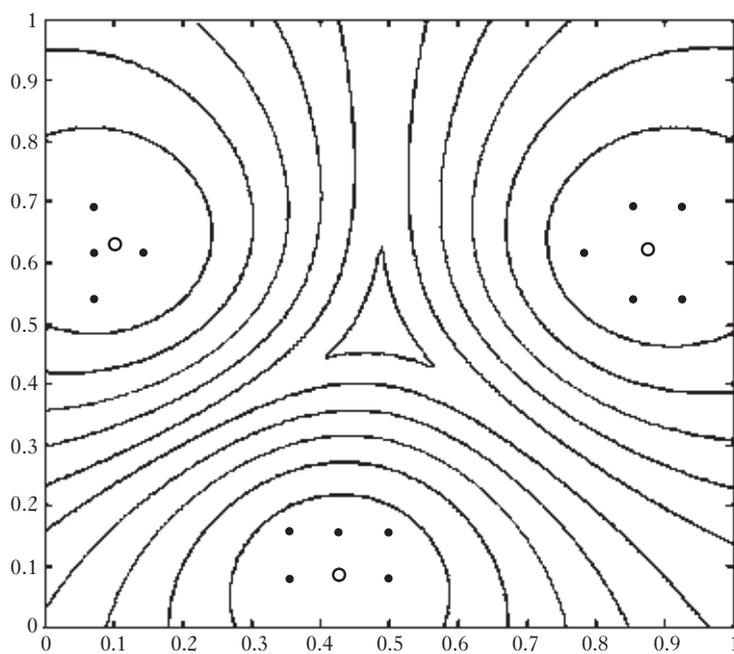
Al aplicar el algoritmo difuso a los broches de Münsingen con una configuración de dos cúmulos, se obtienen las membresías de la fig. 10. En la fig. 11 se resumen los dos grupos formados, mientras en la fig. 12 se puede ver la formación de los dos cúmulos (*a* y *b*). Aquí, el broche 1 tiene un grado de pertenencia de 33.68% para el grupo *a*) y de 66.31% para el grupo *b*). Para el broche 2 la pertenencia al grupo *a*) es de 26.68% y al grupo *b*) de 73.31%, por lo cual no cabe duda de que este último tiene más en común con el grupo *b*). Los demás resulta-

dos de la clasificación se interpretan de una manera similar. Al observar las membresías de pertenencia a grupos y la fig. 12, se puede ver que algunos broches se encuentran entre los dos grupos, lo cual significa que estos broches o pudieran formar otro cúmulo o bien pudieran formar parte de la transición de un grupo a otro. Esto indica que los broches no están bien clasificados, y que quizá la configuración de dos cúmulos no es la más adecuada, lo cual se confirma por la presencia de algunos puntos aberrantes —puntos muy alejados de los centroides de su grupo— en los márgenes de la fig. 12.

Al comparar la clasificación propuesta por Doran y Hodson y la realizada con el algoritmo difuso, pueden observarse algunas coincidencias. Si bien el algoritmo dividió el espacio en dos grupos, los traslapes entre cúmulos se producen con los broches 4, 10, 14, 17, 18, 19, 20, 26, 28, y 29, fuertemente conectados con los dos grupos debido a sus membresías. Por otro lado, los broches tempranos se encuentran distribuidos en el cúmulo *a*), por lo que se pensaría que el cúmulo *b*) es el más tardío. Sin embargo, vemos que no es posible arribar a los mismos resultados a partir del algoritmo de *K-means* y el algoritmo difuso; las configuraciones de grupo obtenidas por cada algoritmo son muy diferentes, además de que resulta importante advertir la presencia de puntos aberrantes y traslapes entre objetos.

Con los algoritmos *K-means* y *Fuzzy* el número de subconjuntos (o cúmulos) debe ser definido por el usuario antes de realizar los cálculos; esta tarea resulta ser un paso crucial en cualquier clasificación, pero el número de cúmulos raramente es conocido *a priori*, por ello el número óptimo puede ser encontrado a partir de medidas de validación, las cuales ofrecen información numérica y gráfica que sirve para llegar a una solución óptima.

Los resultados de la aplicación de las medidas de validación (ecuaciones 1 y 2) se muestran en la fig. 13. Como se puede ver, el número de cúmulos óptimo es 2, lo cual coincide con el número de grupos que se definió al aplicar el algoritmo difuso. Esto indica que la configuración de dos cúmulos es la más adecuada para los broches de Münsingen.



● Fig. 9 Cúmulos de los 22 objetos de Kaufman y Rousseeuw (1990) formados mediante el algoritmo de agrupamiento *fuzzy*.

<i>Membresías de los broches de Münsingen</i>		
1b	0.33684	0.66316
2b	0.26684	0.73316
3b	0.28811	0.71189
4a	0.58811	0.41189
5a	0.74427	0.25573
6b	0.36597	0.63403
7a	0.68467	0.31533
8a	0.65506	0.34494
9b	0.32504	0.67496
10a	0.59656	0.40344
11b	0.33536	0.66464
12b	0.12953	0.87047
13b	0.35378	0.64622
14b	0.42203	0.57797
15a	0.66475	0.33525
16a	0.80046	0.19954
17a	0.59051	0.40949
18b	0.42006	0.57994
19a	0.68617	0.31383
20a	0.51447	0.48553
21b	0.31998	0.68002
22a	0.69237	0.30763
23a	0.60997	0.39003
24a	0.62487	0.37513
25a	0.69025	0.30975
26a	0.54211	0.45789
27a	0.6234	0.3766
28a	0.59392	0.40608
29a	0.59294	0.40706
30b	0.36456	0.63544

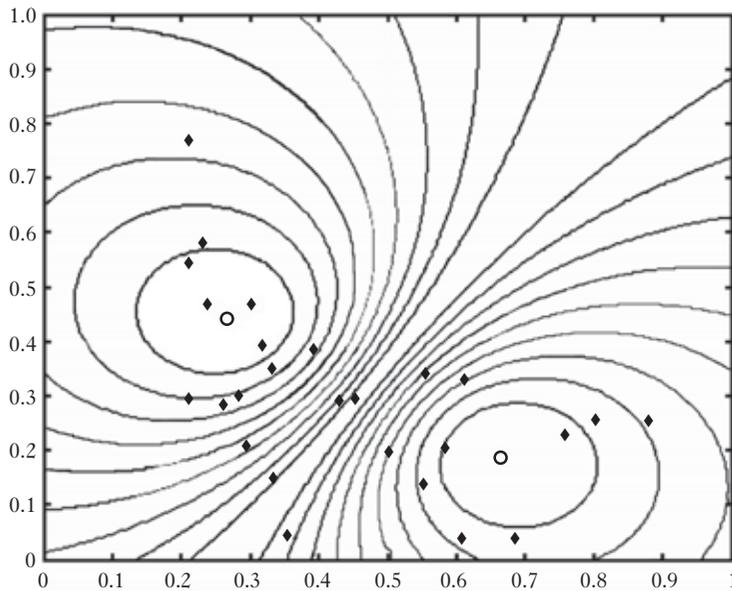
● Fig. 10 Membresías para la formación de dos cúmulos de los broches de Münsingen por medio de un agrupamiento *fuzzy*.

ciones 8 a 14) a los broches se detallan en la fig. 13, mientras en la fig. 14 puede observarse gráficamente el número óptimo de cúmulos para  $c = 2$  y  $c = 3$ . Numéricamente, los valores para los índices SC, S, XB y ADI resultan ser mejores en el caso de  $c = 3$ , ya que los valores bajos de estos índices indican una mejor separación de los cúmulos y un menor traslape. Asimismo, en la fig. 12 se puede observar que el punto de inflexión en las curvas se encuentra suavemente representado en  $c = 3$ , por lo que matemáticamente se comprueba que se obtiene un mejor resultado cuando el espacio de los broches se subdivide en tres cúmulos. Tomando en cuenta este resultado, y aplicándolo al algoritmo *Fuzzy* para  $c=3$ , se obtienen las membresías de la fig. 15. En la fig. 16 se muestran los broches pertenecientes a cada cúmulo, en tanto la representación gráfica se muestra en la fig. 17.

En esta última figura se puede observar una estructura poco elongada de los cúmulos formados, además de la existencia de algunos puntos aberrantes. En las conclusiones de Doran y Hodson se menciona que los broches 1 y 21 tienen algo en común con los broches 9 y 6, pero son una variante de los broches 12, 3 y 20, mientras los broches más tardíos eran los 2, 21 y 30 junto con los broches 1, 3, 12, 9 y 21. En la clasificación del algoritmo difuso se puede observar que los broches descritos por los citados autores se encuentran en el grupo *c*) y corresponden a los broches más tardíos; algunos de los broches tempranos (o la Tene I) se encuentran en el grupo *b*) —broches 10 y 26—. El broche 6, detectado como punto aberrante con la clasificación de *K-means*, aquí es agrupado en el cúmulo *c*) con una membresía de 51.77%. Algunos de los broches se relacionan en los dos o tres cúmulos debido a sus membresías, lo que

<i>Grupo</i>	<i>Broches</i>	<i>Total</i>
1a	4, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29	19
2b	1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 18, 21, 30	11

● Fig. 11 Broches pertenecientes a cada cúmulo formado.



● Fig. 12 Clasificación *fuzzy* de los broches de Münsingen especificando dos cúmulos.

y Hodson, quienes lo interpretaron mediante el algoritmo de *K-means* (fig. 6) como una partición bipartita con la existencia de un punto aberrante, siendo que, observando detenidamente el dendograma, existen más de dos grupos y un mayor número de puntos aberrantes.

En cambio, el agrupamiento difuso puede producir una figura más real dentro de una clasificación, ya que no todos los objetos son forzados a pertenecer a un grupo y existe una manera más formal de interpretar los datos. La principal ventaja del agrupamiento difuso sobre los agrupamientos rígidos es que produce una infor-

	<i>PC</i>	<i>SC</i>	<i>S</i>	<i>XB</i>	<i>DI</i>	<i>ADI</i>
<i>C=2</i>	0.5569	4.7713	0.1590	1.1581	0.2907	0.1426
<i>C=3</i>	0.4187	2.3414	0.1103	0.9968	0.2980	0.0461

● Fig. 13 Medidas de validación para el número óptimo de cúmulos.

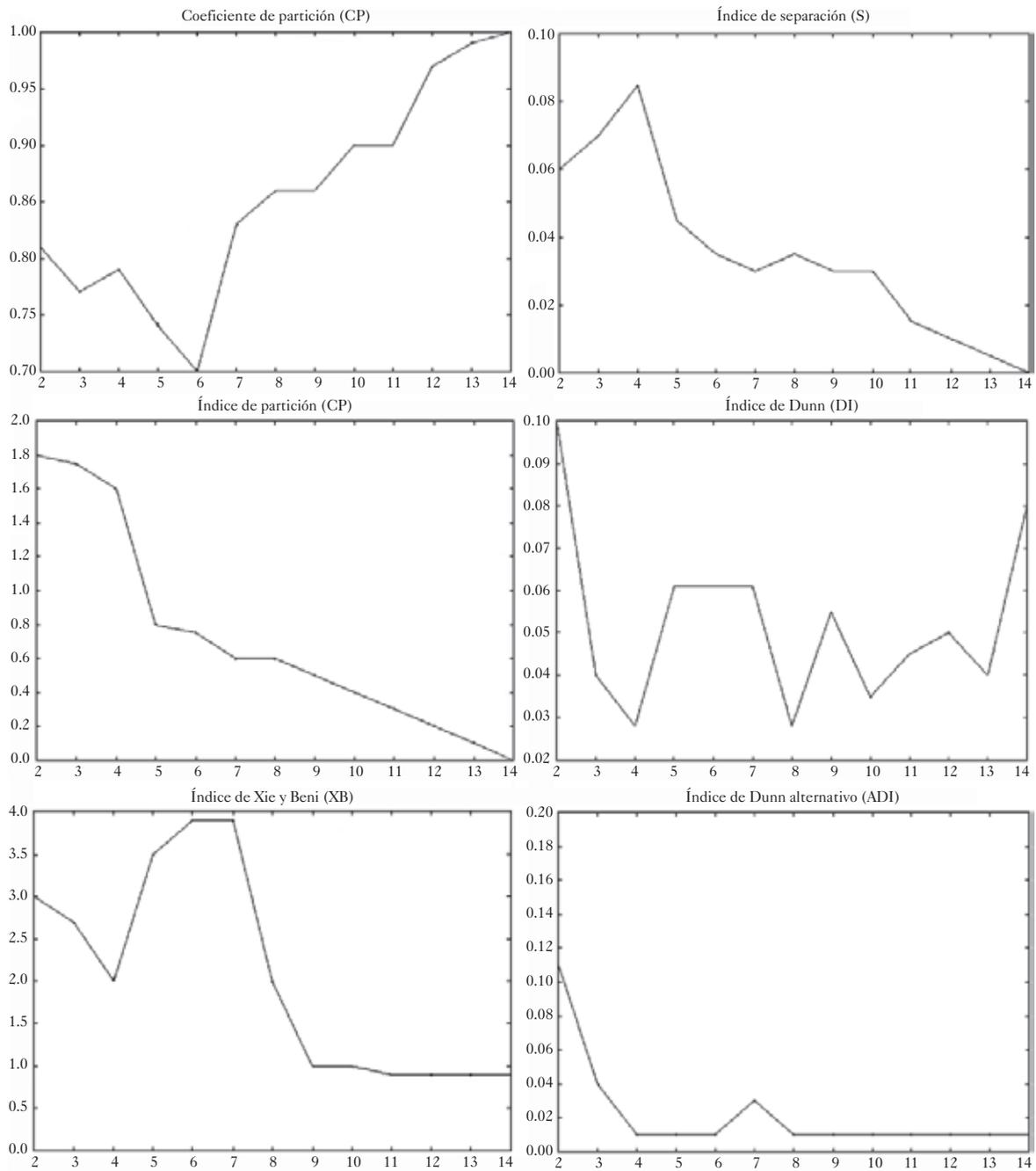
podiera indicar que representan un puente o transición entre un tipo y otro (la Tene I y la Tene II). Lo que sí es claro es que el cúmulo *a*) es más temprano en la secuencia, dando lugar a un cúmulo intermedio o de transición que está dado por el cúmulo *b*); por último, el cúmulo que contiene los broches más tardíos está dado por el cúmulo *c*).

Como puede verse, el agrupamiento difuso es más flexible que la clasificación rígida en cuanto a la formación de los cúmulos, y es más fácilmente interpretable gracias a las membresías calculadas para cada broche. Sin embargo, también existe un problema para determinar el número óptimo de cúmulos, aunque el uso de medidas de validación de cúmulos sirve como una guía en la obtención del número óptimo. El otro problema involucrado en la utilización de los métodos rígidos es la interpretación de los dendogramas, como en el caso de Doran

maación más detallada sobre la estructura de los datos. Algunas desventajas son la necesidad de proporcionar el número de grupos que desean formarse, así como el hecho de que los algoritmos de agrupamiento difuso en ocasiones son difíciles de interpretar.

## Conclusiones

Se ha presentado un método de clasificación basado en la lógica difusa y que puede emplearse para el establecimiento de tipos. Dicho método posee algunas ventajas significativas sobre otros criterios de clasificación no numéricos, en particular sobre métodos numéricos para el análisis de cúmulos rígidos. Este modelo puede tomar como base las clasificaciones hechas mediante el sistema conocido como tipo-variedad. Se resaltó, además, el hecho de utilizar medidas



● Fig. 14 Índices de validación de cúmulos.

<i>Membresías de los 30 broches de Münsingen</i>			
1c	0.19351	0.24797	0.55853
2c	0.12109	0.17168	0.70723
3c	0.20859	0.35996	0.43144
4a	0.42604	0.34914	0.22482
5a	0.56322	0.32303	0.11375
6c	0.23062	0.25168	0.5177
7a	0.5663	0.28307	0.15063
8a	0.51957	0.31161	0.16881
9c	0.21826	0.30492	0.47682
10b	0.30443	0.54242	0.15315
11b	0.1597	0.66768	0.17262
12c	0.03967	0.065325	0.895
13b	0.20645	0.53716	0.25639
14b	0.21902	0.56959	0.21138
15b	0.32549	0.55662	0.11789
16a	0.49368	0.42554	0.08078
17b	0.31265	0.53172	0.15564
18b	0.23882	0.51631	0.24487
19a	0.50248	0.37172	0.12579
20a	0.37301	0.37757	0.24942
21c	0.16024	0.20111	0.63866
22a	0.47267	0.39502	0.13231
23a	0.42443	0.39035	0.18522
24b	0.36121	0.49581	0.14298
25a	0.51477	0.33555	0.14968
26b	0.27779	0.56041	0.1618
27a	0.49332	0.3041	0.20258
28a	0.45537	0.33819	0.20644
29a	0.42664	0.35284	0.22052
30c	0.20518	0.24016	0.55467

● Fig. 15 Membresías calculadas para 3 cúmulos.

<i>Grupo</i>	<i>Broches</i>	<i>Total</i>
a	4, 5, 7, 8, 16, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 29	13
b	10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 24, 26	9
c	1, 2, 3, 6, 9, 12, 21, 30	8

● Fig. 16 Broches pertenecientes a cada uno de los cúmulos formados.

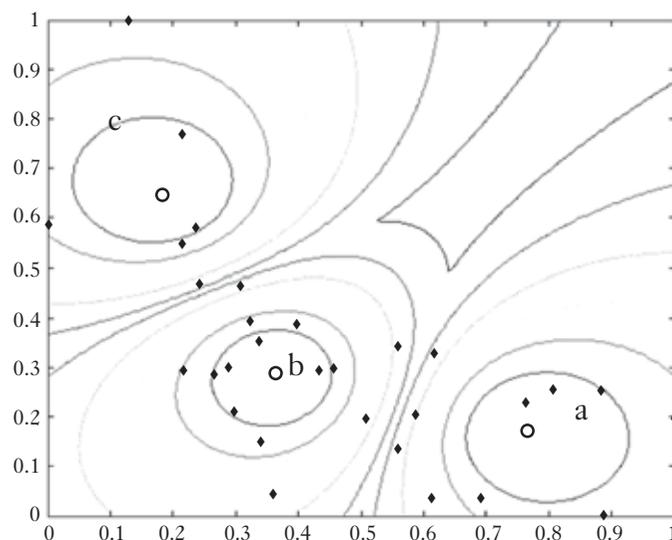
de validación para obtener el número óptimo de cúmulos en un conjunto de datos. La aproximación por conjuntos difusos ofrece una forma diferente de realizar una clasificación de materiales arqueológicos y es útil en la solución de problemas complejos donde no se dispone de un modelo matemático simple.

Esta metodología resulta ideal para la revisión de tipos cerámicos establecidos con métodos convencionales, así como para la posible redefinición de los mismos. Por medio de una clasificación con un algoritmo de agrupamiento difuso pueden encontrarse tipos o sub-tipos no detectados anteriormente, lo cual resulta ideal para el refinamiento de las tipologías y cronologías establecidas. Esto último es posible gracias a la estrecha relación existente entre métodos numéricos y aplicaciones de series matemáticas para el ordenamiento temporal de materiales arqueológicos, con los cuales se pueden obtener cronologías relativas con base en las matrices de datos.

Los ejemplos presentados en este trabajo verifican la aplicabilidad del método propuesto al detectar el número óptimo de tipos mediante medidas de validación, como sucedió en el caso concreto de los datos de los broches del cementerio de Münsingen, Suiza. Desafortunadamente, no existen datos numéricos procedentes de investigaciones en Mesoamérica, por lo que no fue posible utilizar ningún ejemplo de esta región.

## Bibliografía

- Balasko, Balazs; Janos Abonyi y Feil Balazs 2007. "Fuzzy Clustering and Data Analysis Toolbox For Use with Matlab" [<http://www.fmt.vein.hu/softcomp/fclusttoolbox/>].



● Fig. 17 Clasificación *fuzzy* de los broches de Münsingen para tres cúmulos.

- Baxter, Michael  
1994. *Exploratory Multivariate Analysis in Archaeology*, Edinburgh, Edinburgh University Press.
- Bezdek, J.C.  
1981. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, Nueva York, Plenum Press.
- Childe, V. Gordon  
1956. *Piecing Together the Past. The Interpretation of Archaeological Sata*, Londres, Routledge and Kegan Paul.
- Digby, P. G. N.  
1985. "Graphical Displays for Classification", en A. Voorrips y S. Loving (eds.), *To Pattern the Past*, Amsterdam, University of Amsterdam, pp. 75-90.
- Doran, J. E.  
1971. "Computer Analysis of Data from La Tène Cemetery at Münsingen-Rain", en F.R. Hodson, D.G. Kendall y P. Tautu (eds.), *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*, Edinburgh, Edinburgh University Press, pp. 422-431.
- Doran, J.E. y F.R. Hodson  
1975. *Mathematics and Computers in Archaeology*, Edinburgh, Edinburgh University Press.
- Hill, James N. y Robert K. Evans  
1972. "A Model for Classification and Typology", en David L. Clarke (ed.), *Models in Archaeology*, Londres, Methuen, pp. 231-273.
- Hodson, F.R.  
1970. "Cluster Analysis and Archaeology: Some New Developments and Applications", en *WLD Archaeology*, vol. 1, núm. 3, pp. 299-320.
- Hsieh, B.Z.; C. Lewis y Z.S. Lin  
2005. "Lithology Identification of Aquifers Form Geophysical Well Logs and Fuzzy Logic Analysis: Shui-Lin Aarea, Taiwan", en *Computers and Geosciences*, núm. 31, pp. 263-275.
- Kandel, A.  
1986. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*, Reading, Addison-Wesley.
- Kaufmann, A. y M. M. Gupta  
1988. *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Amsterdam, North-Holland.
- Kaufman, Leonard y Peter J. Rousseeuw  
1990. *Finding Groups in Data. An Introduction to Cluster Analysis*, Nueva York, John Wiley & Sons.
- Kendall, D. G.  
1971. "Seriation from Abundance Matrices", en F. R. Hodson; D.G. Kendall y P. Tautu (eds.), *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*, Edinburgh, Edinburgh University Press, pp. 215-252.

- Lai, Y.J. y C.L. Hwang  
1994. *Fuzzy Multiple Objective Decision Making Methods and Applications*, Berlín, Springer-Verlag.
  
- Liu, X. y L. Shi  
1993. "Fuzzy Pattern Recognition of the Mode of Fluidization", en M. Mao (ed.), *Selected Papers of Engineering Chemistry and Metallurgy*, Beijing, Science Press, pp. 182-189.
  
- Rouse, Irving  
1960. "The Classification of Artifacts in Archaeology", en *American Antiquity*, vol. 25, núm. 3, pp. 313-323.
  
- 1970a. "Classification for What? Comments on *Analytical Archaeology* by D. L. Clark, 1968", en *Norwegian Archaeological Review*, núm. 3, pp. 4-12.
  
- Sutton, M. A.; J. C. Bezdek y T. C. Cahoon  
2000. "Image Segmentation by Fuzzy Clustering: Methods and Issues", en I. N. Bankman (ed.), *Handbook of Medical Imaging Processing and Analysis*, San Diego, Academic Press, pp. 87-106.
  
- Xie, X.L. y G. Beni  
1991. "A Validity Measure for Fuzzy Clustering", en *IEEE Transactions of Pattern Analysis and Machine Intelligence*, núm. 13, pp. 841-847.
  
- Zadeh, Lofti A.  
1965. "Fuzzy Sets", en *Information and Control*, núm. 8, pp. 338-353.
  
- 1973. "Outline of a New approach to the Analysis of Complex System and Decision Processes", en *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, núm. 1, pp. 28-44.
  
- Zimmermann, H. J.  
1983. "Using Fuzzy Sets in Operational Research", en *European Journal of Operational Research*, vol. 13, núm. 3, pp. 201-216.
  
- 1996. *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
  
- 2000. "An Application-oriented View of Modeling Uncertainty", en *European Journal of Operational Research*, núm. 122, pp. 190-198.

