JORGE ZAVALA CARRILLO*

De las medidas de las aguas[1]

Sistema de medición de las aberturas o *datas* para la distribución legal del agua, utilizado en México durante el Virreinato y el siglo XIX

En México, durante el Virreinato y parte del siglo XIX, las unidades hidráulicas utilizadas fueron el *buey*, el *surco*, la *naranja*, el *real* o *limón*, y la *paja*. El propósito de este artículo es conocer el funcionamiento del sistema de medidas hidráulicas, analizar —mediante tablas— sus dimensiones, comprender la generación de múltiplos y submúltiplos de sus áreas, y la mutación de las figuras adoptadas por las *datas* conservando el área de abertura por medio de la geometría.
Palabras clave: datas de agua, medidas, *buey de agua*, *paja*, *paja de agua*, medidas, áreas, equivalencias, de cuadrado a círculo.

En época anterior a la cristiana, para distribuir el agua los griegos y romanos determinaban la cantidad a repartir por la sección de la tubería o encañado por el que emergía, sin considerar la velocidad como un factor determinante de su caudal.

Frontinus[2] menciona hasta 25 calibres diferentes de tuberías,[3] que iban desde la pequeña *quinaria* hasta la *centenum vicenum*.

La correlación innegable de que el caudal es el producto de la sección transversal por la velocidad del agua, fue descrita con claridad por vez primera por Herón de Alejandría[4] en su obra *Dioptría*.[5] Sin embargo, a pesar de tan importante descubrimiento en el me-

* Coordinación Nacional de Monumentos Históricos, INAH. Digitalización de imágenes hecha por Alejandro Machuca Martínez, CNMH-INAH.

[1] Título tomado de Mariano Galván, *Ordenanzas de tierras y aguas*, París, Librería de Rosa y Bouret, 1868, p. 252.

[2] *Obras hidráulicas en América colonial*, Madrid, Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo (CEHOPU), 1993, p. 214. Frontinus, gran autoridad en la administración de las aguas de Roma, fue nombrado *curator aquarum* en el año 97 d. C. por el emperador Nerva.

[3] En su célebre tratado *De aqueductu urbis Romae*.

[4] Miguel de Toro y Gisbert, *Pequeño Larousse ilustrado*, París, Larousse, 1966, p. 1346. Herón, matemático y físico de Alejandría (siglo I d.C.), inventor de la dioptra o pínula, primer instrumento universal de medida, y autor de tratados de mecánica y óptica.

[5] *Idem*.

dioevo y gran parte de la época moderna, se continuó asignando el agua en función únicamente del área de la abertura o *data* de los caños.

En España[6] la *paja de agua* era la unidad hidráulica básica. Sin embargo, la mayoría de las unidades empleadas eran identificadas con nombres de monedas acuñadas en las cecas,[7] dado que sus círculos[8] estaban cuidadosamente calibrados, eran del dominio público y conocidas popularmente. La superficie en *pajas de agua* de esas monedas[9] era: el *real de a ocho* 40; la *dobla* 24; el *real de a cuatro* 20; el *real de plata castellano* 19; el *dinero de plata barcelonés* 13; la *blanca vieja* 12; el *cornado* o *coronado* 8; el *dinero* 7.5; el *cinquén* 4.5 y el *real de medio cuartillo* 3.

En Sevilla algunas unidades pequeñas se identificaban con legumbres, a las que se les asignaba en *pajas de agua* las siguientes superficies: al *garbanzo remojado* 2.5, al *seco* 2 y a la *lanteja* o *lenteja* $^3/_4$ (figura 1).

Las unidades hidráulicas utilizadas en México, durante el Virreinato y el siglo XIX

La práctica española de medir los caudales sólo en función de la sección se instauró en América a partir del siglo XVI, y continuó en el transcurso de la época virreinal y el siglo XIX a pesar de los grandes avances del Renacimiento (figura 2).

En la Nueva España las unidades hidráulicas utilizadas fueron el *buey*, el *surco*, la *naranja*, el *real* o *limón* y la *paja*, y posiblemente se usaron también —aunque con menor frecuencia— el *dedo* y el *grano*.

A mí entender, la expresión *de agua* —que figura después de locuciones tan heterogéneas como *data, buey, vara, surco, naranja, limón, dedo, paja*— simboliza que se encuentra uno ante una sección, área o superficie.

Existen unidades de medición de áreas —como el *buey*, el *surco*, la *naranja*, el *limón*— que al no existir unidades homónimas que designen longitudes, pareciera innecesario agregarles el término "de agua".

No ocurre lo mismo con unidades como *línea, grano, paja, dedo, pulgada, pie* o *vara* que, cuando se refieren a aberturas, pareciera indispensable agregar "de agua". Sin embargo, durante el tiempo en se utilizó este sistema de medición, no en todos los casos, se agregó el término, dejando este cometido al contexto del escrito en que figuraban las unidades de medición.[10]

Buey de agua[11]

Imaginemos un cuadrado que midiera una *vara* por lado.[12] Entonces, el buey resultará ser una *data*[13] o área de una *vara* cuadrada.[14]

[6] *Obras hidráulicas en la América colonial, op. cit.*, p. 215. En la lámina sobre medidas usadas en tiempos de los reyes católicos, fechada en 1657, dice que se usaban en tiempos del rey don Juan. Se ha de referir a don Juan II, que reinó entre los años 1407 y 1454. Doña Isabel, la Católica, reinó entre 1474 y 1504. *Cfr. Kalendario manual, y guía de forasteros en Madrid, para el año de MDCCLXXVIII*, Madrid, Imprenta Real de la Gazeta, 1778, p. s/n; véase el capítulo "Cronología de los reyes de España, y años en que han fallecido". Con estos datos, por lo menos estas medidas estuvieron en uso en España desde inicios del siglo XV.

[7] Ceca, casa de moneda; véase Miguel de Toro Gisbert, *Pequeño Larousse ilustrado*, Buenos Aires, Larousse, 1966, p. 215.

[8] "Círculo" (del latín *circulus*), porción de superficie limitada por una circunferencia; María Moliner, *Diccionario de uso del español*, Madrid, Gredos, 1998, p. 641.

[9] Para consultar las medidas de estas aberturas, véase la figura 1.

[10] En este artículo, cuando se trate de unidades de superficie se utilizará el exponente de la segunda potencia. Consúltese María Moliner, *op. cit.*, t. A-H, p. 1258. Exponente, número o expresión que, colocados a la derecha y en la parte superior de otro, expresa la potencia a que hay que elevarlo.

[11] El *buey de agua* es una abertura o *data* de figura cuadrada en que cada lado tiene una *vara*, y por lo mismo su área o superficie es de una *vara* cuadrada. Mas como una *vara* consta de 48 *dedos* o de 36 *pulgadas*, dicha superficie también será de 2 304 *dedos* cuadrados o 1 296 *pulgadas* cuadradas.

[12] Esa misma medida enunciada en pies serían tres: en *pulgadas* 36; en *dedos* 48; en *pajas* 144; en *líneas* 432; o en *puntos* 5 184.

[13] María Moliner, *op. cit.*, t. A-H, p. 862. "Data" (del latín *data*, *dada*), agujero o abertura que se hace en los depósitos de agua para dar salida a cierta cantidad de ella. Véase también "desaguadero".

[14] Esa misma superficie expresada en *pies* cuadrados serían 9; en *pulgadas* cuadradas 1 296; en *dedos* cuadrados 2 304; en

Surco de agua

Es 1/48 de *buey*, siendo el buey un cuadrado de 48 *dedos* × 48 *dedos* resulta un área de 2 304 *dedos*^{2}, por lo cual el *surco* mide:

$$\frac{2\,304\ ^{dedos2}/_{buey}}{48\ ^{surcos}/_{buey}} = 48\ ^{dedos2}/_{surco}$$

Es una *data* con la figura de un rectángulo de ocho *dedos* de base por seis *dedos* de altura.[15]

Naranja

Es la tercera parte del *surco*:

$$\frac{48\ ^{dedos2}/_{surco}}{3\ ^{naranjas}/_{surco}} = 16\ ^{dedos2}/_{naranja}$$

Es una medida o *data* de figura rectangular, de ocho *dedos* de largo, y dos de ancho.[16] La *naranja* es un área de 16 *dedos*^{2}.

Real de agua o limón

Es la octava parte de la *naranja:*

$$\frac{16\ ^{dedos2}/_{naranja}}{8\ ^{limones}/_{naranja}} = 2\ ^{dedos2}/_{limón}$$

Es una *data* de figura rectangular de dos *dedos* de largo y uno de ancho.[17]

$$A = 2\ ^{dedos2}/_{limón} = 1\ dedo \times 2\ dedos =$$
$$A = 3\ pajas \times 6\ pajas = 18\ ^{pajas2}/_{limón}$$

El *real de agua* o *limón* es un área de dos *dedos*^{2} e igual a 18 *pajas*^{2}.

Dedo de agua

Un *dedo*^{2} es la superficie de medio *limón* o nueve *pajas de agua*.

Paja de agua[18]

Es la dieciochoava parte del *real de agua:*

$$\frac{18\ ^{pajas2}/_{limón}}{18} = 1\ paja\ de\ agua.$$

Grano de agua

El *grano* equivale a $^3/_4$ de *paja*, así que el *grano de agua* es un área:

$$A = (^3/_4\ pj.)^2 = {}^9/_{16}\ pj^2.$$

Obtención de las dimensiones de las *datas de agua*

Las aberturas de los caños eran representadas por cuadrados o por rectángulos, según conviniera, con el propósito de multiplicar un lado por el otro con números enteros, generalmente expresados en *dedos*, y las medidas de menor superficie, en *pajas*.

Los artesanos que fabricaban los caños y las cajas de agua debían poseer conocimientos matemáticos y geométricos para dimensionar las *datas* en las diferentes formas en que se necesitaran: cuadradas, rectangulares o circulares.

pajas cuadradas 20 736; en *líneas* cuadradas 186 624; o en *puntos* cuadrados 26 873 856.

15 *Cf*. Mariano Galván, *op. cit*., p. 252.

16 *Ibidem*, p. 253.

17 *Idem*.

18 *Ibidem*, p. 254. La *paja de agua* o *paja* cuadrada equivale a un *grano* cuadrado y 7/9 de *grano* cuadrado. Es también 1/16 de *pulgada* cuadrada, que se saca multiplicando por sí mismo 1/4 de *pulgada* que tiene también tanto de largo como de ancho.

Por medio de las matemáticas

En nuestra época, en que se utiliza el Sistema Métrico Decimal (SMD), y en la que nos auxiliamos con máquinas calculadoras y computadoras, las fórmulas para obtener las áreas de las distintas figuras en que podían generarse las aberturas o *datas*, y de las dimensiones de sus lados, diámetros y circunferencias, según sea el caso, son muy fáciles de realizar. En el periodo que va prácticamente de los inicios del siglo XVI hasta concluir el XIX, aplicar esas mismas fórmulas y obtener las medidas mencionadas era labor de un matemático de mucha experiencia, ya que el sistema de medición en uso era exacto, pero complicado en su operación. Por las peculiaridades del sistema, era forzoso realizar las operaciones como sumar, restar, multiplicar, elevar a la segunda potencia y obtener raíz cuadrada con quebrados.

Longitudes

Las mediciones de longitudes y de superficies, aun dentro del mismo sistema convencional de medidas, no eran expresadas de igual manera por todos los usuarios. Para ilustrar este aserto, veamos cómo es posible enunciar la distancia[19] de 13 316.77 *mm* de distintas formas, empleando el sistema de medidas establecido en México por los españoles:

1. Puede mencionarse utilizando para ello las siguientes unidades: *varas* + *pies* + *dedos* + *granos* + *cabellos*[20] y *puntos*, de la manera siguiente: 15 *varas*, 2 *pies*, 8 *dedos*, 3 *granos*, 5 *cabellos* y $0.^{03}$ *puntos*.

2. Otra forma de expresión, utilizando *varas* + *pies* + *dedos* + *pajas* + *líneas* + *puntos* se diría: 15 *varas*, 2 *pies*, 8 *dedos*, 2 *pajas*, 2 *líneas* y $7.^{63}$ *puntos*.

3. O podría sustituirse el *dedo* por la *pulgada*, y se formularía así: 15 *varas*, 2 *pies*, 6 *pulgadas*, 2 *pajas*, 2 *líneas* y $7.^{63}$ *puntos*.

4. Otra forma es manteniendo como unidad la *vara* y el resto como fracción, obteniendo el común denominador: *varas* + *pie* (representado como tercio de *vara*) + *pulgada* (como doceavo del *pie*) + la *línea* (como doceavo de la *pulgada*) y el *punto* (como doceavo de la *línea*): 15 *varas*, $^{2}/_{3}$ de *vara*, $^{6}/_{12}$ de *pie*, $^{2}/_{4}$ de *pulgada*, $^{2}/_{3}$ de *paja*, $^{7}/_{12}$ *línea* y $^{63}/_{100}$ de *punto*.

Para obtener un común denominador, hacemos lo siguiente:

$$15\ \mathit{varas} + {}^{2}/_{3} + {}^{6}/_{12\times 3} + {}^{2}/_{12\times 3\times 4} + {}^{2}/_{12\times 3\times 4\times 3} + {}^{7}/_{12\times 3\times 4\times 3\times 12} + {}^{63}/_{12\times 3\times 4\times 3\times 12\times 100} =$$

$$15\ \mathit{varas} + \left({}^{2}/_{3} + {}^{6}/_{36} + {}^{2}/_{144} + {}^{2}/_{432} + {}^{7}/_{5\,184} + {}^{63}/_{518\,400}\right) \text{ de } \mathit{vara} =$$

$$\frac{15\ v + {}^{518,400}/_{3}\times 2 + {}^{518\,400}/_{36}\times 6 + {}^{518\,400}/_{144}\times 2 + {}^{518\,400}/_{432}\times 2 + {}^{518\,400}/_{5\,184}\times 7 + {}^{518\,400}/_{518\,400}\times 63}{518\,400} =$$

$$\frac{15\ \mathit{varas} + 345\,600 + 86\,400 + 7\,200 + 2\,400 + 700 + 63}{518\,400} =$$

$$\frac{15\ \mathit{varas} + 442\,363}{518\,400} =$$

$$15\ \mathit{varas} + \frac{442\,363}{518\,400} =$$

$$15\ \mathit{varas} + \frac{8\,533 \text{ de vara}}{10\,000}$$

[19] Esta longitud corresponde a la circunferencia de la *data de agua* de 20 *bueyes*. Véase la figura 14.

[20] Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros*, Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767, p. 106. El *grano* se divide en seis partes, a las que llaman *cabellos*, y ésta es la medida que usan en Madrid.

5. Otra forma de representación, sobre todo cuando las mediciones sean menores, al utilizar como unidad la *pulgada* y expresar sus submúltiplos en diezmilésimas,[21] son las siguientes.

Conversión de la longitud de varas a pulgadas:

$$15.^{8,533}\ \textit{varas} \times 36\ ^{\text{pulgadas}}/_{\text{vara}} = 570.^{7188}\ \textit{pulgadas}.$$

Conversión de esta longitud a *milímetros*, para comprobar las operaciones efectuadas:[22]

$$570.^{7\,188}\ \textit{pulgadas} \times \frac{233\,333.33\ ^{\text{mm}}/_{\text{plg}}}{10\,000} = 13\,316.77\ \textit{mm}$$

6. Por último, si se emplean unidades de medición como la *media vara*, también llamada *codo pequeño*, que equivalía a *pie y medio*; el *paso, pasada simple* o *codo común* que equivalía a dos *pies*; y si también usamos las unidades que agrupan distintas cantidades de *dedos*, como las denominadas: *palmos*,[23] *ochavas*,[24] *sesmas*,[25] *decíax*[26] y *espetema* o *palmo antiguo romano*,[27] y hacemos participar al *paso de Salomón*,[28] entre otras unidades de medición[29] que podríamos emplear, la medida de 13 316.^{77} *mm* se expresa así:

$$9\ \textit{pasos de Salomón} + 1\ \textit{codo común} +$$
$$1\ \textit{sesma} + 3\ \textit{granos} + 5\ \textit{cabellos} + 0.^{03}\ \textit{puntos}.$$

Si se convierte cada una de las unidades a milímetros se obtiene:

$$12\,600\ \textit{mm} + 560\ \textit{mm} + 140\ \textit{mm} +$$
$$13.^{13}\ \textit{mm} + 3.^{65}\ \textit{mm} = 13\,316.^{78}\ \textit{mm}.$$

Otro factor que añadía dificultad a la comprensión de las longitudes era que las unidades de medición no eran iguales en las diferentes provincias de España, ya que en unas regiones se medía con cuerdas y en otras con varas, en las que variaba el número de *pies* y el *pie*, aun siendo la medida universal, también tenía una longitud mayor o menor según la provincia.[30]

En este artículo se toman la *vara* y el *pie* como su tercera parte, que convencionalmente equivalen, en el SMD a 84 y 28 cm, respectivamente.

Raíz cuadrada

Si se requería de una *data* cuadrada, se obtenía la longitud de sus lados mediante la raíz cuadrada de su área: $L = \sqrt{A}$.

Como el sistema de medición empleado consta de unidades de medición en las que unas son submúltiplos de las otras, de forma discontinua, ya que el *pie* es $^1/_3$ de la *vara*; el *dedo,* que es $^1/_{16}$ del *pie*, es a la vez $^1/_{48}$ de la *vara*; la *paja* es $^1/_3$ de *dedo* y $^1/_{144}$ de *vara*; la *línea* es $^1/_3$ de *paja* y $^1/_{432}$ de *vara*; el *punto* es $^1/_{12}$ de la *línea* y $^1/_{5\,184}$ de *vara*, se recurre al denominador común.

21 *Ordenanzas de tierras y aguas, o sea formulario geométrico Judicial, para la designación, establecimiento, mensura, amojonamiento y deslinde de las poblaciones, y todas suertes de tierras, sitios, caballerías y criaderos de ganados mayores y menores, y mercedes de aguas: recopiladas a beneficio de los pobladores, ganaderos, labradores, dueños, arrendatarios y administradores de haciendas, y toda clase de predios rústicos, de las muchas y dispersas resoluciones dictadas sobre la materia, y vigentes hasta el día en la República Mexicana*, México, Imprenta de Vicente G. Torres, calle del Espíritu Santo N. 2, 1842, p. 137.

22 La *pulgada* mexicana equivale a 280 *mm* que mide un *pie*, entre las 12 *pulgadas* en que se divide, por lo que es igual a 23.33 *mm*. Esta última cantidad se multiplicó y dividió por 10 000, para lograr una mayor aproximación.

23 El *palmo* mide cuatro *dedos*.

24 La *ochava* mide seis *dedos*.

25 La *sesma* mide ocho *dedos*.

26 La *decíax* mide 10 *dedos*.

27 El *palmo* mide 12 *dedos*.

28 El *paso de Salomón* mide cinco *pies* y equivale a 1 400 *mm*. 15 *varas* mexicanas miden la misma longitud que nueve *pasos de Salomón*. El *codo* común abarca dos *pies* y equivale a 560 *mm*. La *sesma* abarca ocho *dedos* y equivale a 140 *mm*.

29 3 *granos* $\times$ $^{4.375\ \text{mm}}/_{\text{grano}}$ = 13.13 mm; 5 *cabellos* $\times$ 0.$^{73\ \text{mm}}/_{\text{cabello}}$ = 3.^{65} *mm*.

30 Antonio Plo y Camin, *op. cit.*, p. 106.

Para obtener los lados de una *data* cuadrada de dos *bueyes de agua*, hay que tener presente que se trata de dos *varas* cuadradas. Dependiendo la aproximación a la que se desee llegar: *pajas*,[31] *líneas*[32] o *puntos*,[33] se tendría que convertir esa área en la menor unidad, dentro del sistema de medidas que cumpliera su propósito, después de lo cual se obtiene la raíz cuadrada. En este ejercicio se llegará a centésimas de *punto*:[34]

$$A = 2\ \textit{bueyes} \times \frac{(5\,184\ ^{\text{puntos}}/_{\text{vara}})^2}{\textit{buey}} = 53\,747\,712\ \textit{puntos}^2$$

$$L = \sqrt{53\,747\,712\ \textit{puntos}^2} = 7\,331.^{28}\ \textit{puntos}$$

Ahora bien, estos *puntos* habrá que agruparlos en unidades que puedan medirse con los instrumentos disponibles durante el Virreinato y el siglo XIX, que probablemente estaban graduados en *varas*, *pies*, en *dedos* o en *pulgadas* y en *pajas*, *líneas* y *puntos*, por lo que se tendrían que realizar operaciones como las siguientes:

$$7\,331.^{28}\ \textit{puntos} - 5\,184\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{vara}} = 1\ \textit{vara} + 2\,147.^{28}\ \textit{puntos}$$

$$2\,147.^{28}\ \textit{puntos} - 1\,728\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{pie}} = 1\ \textit{pie} + 419.^{28}\ \textit{puntos}$$

$$\frac{419.^{28}\ \textit{puntos}}{108\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{dedo}}} = 3\ \textit{dedos} + 95.^{28}\ \textit{puntos}$$

$$\frac{95.^{28}\ \textit{puntos}}{36\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{paja}}} = 2\ \textit{pajas} + 23.^{28}\ \textit{puntos}$$

$$23.^{28}\ \textit{puntos} - 12\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{línea}} = 1\ \textit{línea} + 11.^{28}\ \textit{puntos}$$

De manera que el lado de una *data* de dos *bueyes de agua* resulta ser: 1 *vara*, 1 *pie*, 3 *dedos*, 2 *pajas*, 1 *línea*, $11.^{28}$ *puntos*, longitud susceptible de medir con una regla como la propuesta en la figura 14.

La cuadratura del círculo

Los conductos por los que fluía el agua no siempre eran rectangulares o cuadrados como indicaban las definiciones de las *datas*. Ante esto, los artesanos se veían en la necesidad de convertir esas figuras geométricas en su equivalente circular.

Para medir los círculos y sus componentes es obligatorio tener conocimiento de la proporción que guardan recíprocamente el diámetro y la circunferencia, de manera que conociendo alguno de ellos se determine el que se ignora. En la segunda mitad del siglo XVII en Occidente no se había llegado a la proporción justa que había entre uno y otro. Muchos sabios habían trabajado en ello, no obstante los más estimados fueron Arquímedes,[35] Adriano Mercio[36] y Luis de Ceulen.[37] Algunas propuestas daban una mayor aproximación; sin embargo, por ofrecer la facilidad de requerir de menos números, se adoptó la propuesta de Arquímedes,[38] que determina que la circunferencia es tres veces y un $^1/_7$ el diámetro. Si se expresa en séptimos, resultan: $^{22}/_7$.

[31] Cada *paja* equivale a 5.83 *mm*. Resulta más aproximada que cuando trabajamos con *cm* en el SMD.
[32] La *línea* equivale a 1.94 *mm*, siendo entonces la aproximación menor que cuando utilizamos *mm* en el SMD.
[33] El *punto* es equivalente a 0.16 *mm*, o 16 cienmilésimas de *metro* en el SMD.
[34] La centésima de *punto* equivale a 0.0016 *mm*, aproximación que sólo puede medirse con instrumentos de precisión.

[35] Arquímedes: diámetro 7, circunferencia 22, c/d resulta 3.1429. Respecto de π es 0.0012 mayor.
[36] Adriano Mercio: diámetro 71, circunferencia 223, c/d resulta 3.1408. Respecto de π es 0. 0008 menor.
[37] Ceulen: diámetro 100, circunferencia 314, c/d resulta 3.14. Respecto de π es 0.0016 menor.
[38] *Enciclopedia Barsa*, México, Enciclopedia Británica Publishers, Inc., p. 18: Arquímedes de Siracusa vivió hacia los años 287-212 a.C. Gran matemático físico e ingeniero, determinó los límites para el valor de π, que es el número que determina la relación entre la circunferencia y el diámetro del círculo. Demostró que el valor π oscila entre 3 $^{10}/_{70}$ y 3 $^{10}/_{71}$. Su valor aproximado en nuestros actuales libros de matemáticas es de $3.^{1416}$.

Así, para obtener el diámetro realizaban la siguiente ecuación:[39]

$$D = \frac{2\sqrt{7\,A}}{22}$$

Ecuación que proviene de:

$$A = \frac{r^2 \times 22}{7}$$

El diámetro mide dos veces el radio: $D = 2\,r$, y si despejamos el radio:

$$r = \frac{\sqrt{7\,A}}{22}$$

entonces:

$$D = \frac{2\sqrt{7\,A}}{22}$$

Con esta fórmula se consigue una considerable aproximación, ya que los resultados son análogos a los obtenidos con la fórmula actualmente en uso:[40]

$$D = \frac{2\sqrt{A}}{\pi}$$

En el Reglamento General de las medidas de las aguas, publicado en 1761,[41] se establece que si la *data* ha de ser circular se hallará su diámetro con la razón de Arquímedes, diciendo *como 11 a 14, así el área de la figura sea naranja, sulco, etcétera, dada en partes mínimas; al cuadrado del diámetro, cuya raíz será el diámetro requisito*.[42] La ecuación resultante es:

$$D = \frac{\sqrt{14\,A}}{11}$$

Ésta se deriva de la primera:

$$D = \frac{2\sqrt{7\,A};}{22}$$

donde el 2 se eleva a la segunda potencia para introducirlo en la raíz:

$$D = \frac{\sqrt{4 \times 7\,A}}{22} = \frac{\sqrt{28\,A}}{22} = \frac{\sqrt{14\,A}}{11}$$

Obtención del diámetro de una *data* de dos *bueyes de agua* aplicando la ecuación utilizada en México durante el Virreinato y el siglo XIX:

$$D = \frac{2\sqrt{7\,A}}{22} =$$

$$D = \frac{2\sqrt{7 \times 53\,747\,712\ \textit{puntos}^2}}{22} = 8\,270.^{80}\ \textit{puntos}$$

$$8\,270.^{80}\ \textit{puntos} - 5\,184\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{vara}} = 1\ \textit{vara} + 3\,086.^{80}\ \textit{puntos}$$

$$3\,086.^{80}\ \textit{puntos} - 1\,728\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{pie}} = 1\ \textit{pie} + 1\,358.^{80}\ \textit{puntos}$$

$$\frac{1\,358.^{80}\ \textit{puntos}}{108\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{dedo}}} = 12\ \textit{dedos} + 62.^{80}\ \textit{puntos}$$

$$62.^{80}\ \textit{puntos} - 36\ ^{\textit{puntos}}/_{\textit{paja}} = 1\ \textit{paja} + 26.^{80}\ \textit{puntos}$$

$$\frac{26.^{80}\ \textit{puntos}}{12} = 2\ \textit{líneas} + 2.^{80}\ \textit{puntos}$$

De manera que el diámetro de una *data* de dos *bueyes de agua* resulta ser: 1 *vara*, 1 *pie*, 12 *dedos*, 1 *paja*, 2 *líneas*, $2.^{80}$ *puntos*.

[39] Mariano Galván, *op. cit.*, p. 258. Si a la *data* se le quiere dar forma circular, se multiplicará por 7 el área de dicha *data*, se partirá el producto por 22, se extraerá la raíz cuadrada de ese cociente, que expresa el radio de la *data* circular, y su duplo es el diámetro de la misma data.
[40] Ya que $^{22}/_{7} = 3.^{1429}$ comparado con $\pi = 3.^{1416}$ resulta muy cercano.
[41] Mariano Galván, *op. cit.*, p. 260.
[42] *Ibidem*, p. 274.

Comparada con: 1 *vara*, 1 *pie*, 12 *dedos*, 1 *paja*, 2 *líneas*, $4.^{45}$ *puntos*, que se obtuvo de la carta de *datas de agua* cuadradas y circulares, resulta muy cercana, y serían iguales si se desprecian los *puntos* y la aproximación se queda en *líneas*.

Por medio de la geometría

Las operaciones matemáticas en las que participaban los quebrados con los que había que realizar sumas, multiplicaciones y raíz cuadrada de una multitud de fracciones, demandaban la participación de un aritmético grande.[43] Se prefería entonces un método que con facilidad pudieran utilizar los albañiles y los artesanos que proveían de productos manufacturados para la construcción de edificios.

Obtención de múltiplos y submúltiplos
de las *datas* cuadradas

El cuadrado es un paralelogramo de lados iguales y ángulos de 90°; para comprobar esta particularidad se trazan diagonales que deben resultar de igual longitud. También se trazan los ejes horizontal y vertical; en su intersección se apoya la punta del compás, y con el otro extremo, tocando uno de los vértices, se traza la circunferencia que debe tocar las cuatro aristas.[44]

Si se considera el trazo de una sola diagonal, se formarán dos triángulos rectángulos que comparten hipotenusa y sus lados serán iguales entre sí. Tomemos uno de esos triángulos cuyos lados sean a y b y la hipotenusa c, y elevemos al cuadrado la longitud de sus lados. Si el área que se obtuviere resultara igual a una unidad al cuadrado, el resultado de multiplicar la hipotenusa por sí misma

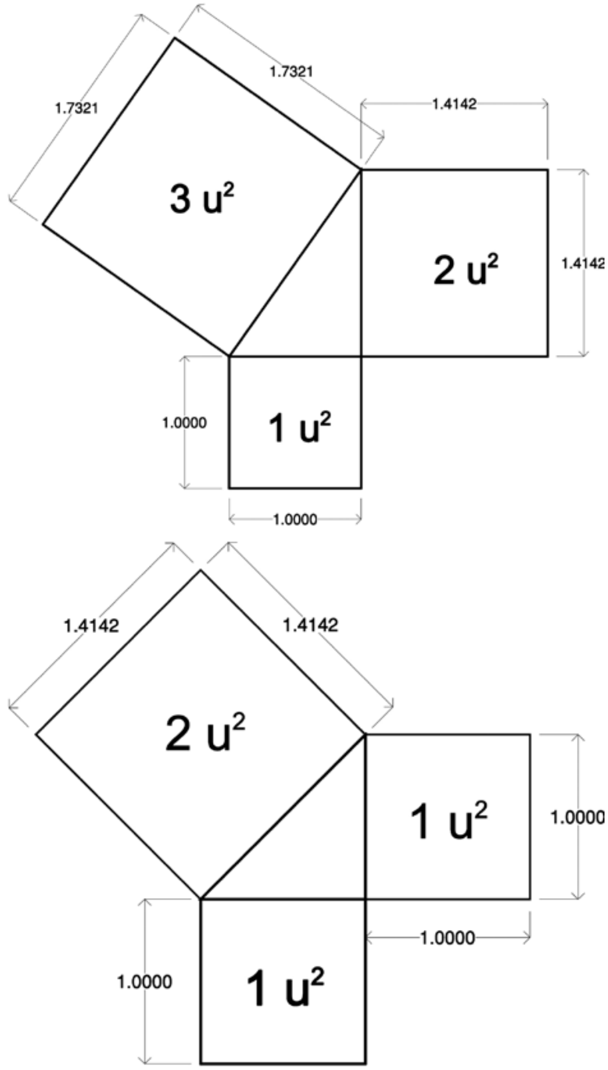

Figura 3. Obtención de cualquier múltiplo o submúltiplo de las *datas de agua* de forma cuadrada con la aplicación práctica de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$.

será de dos unidades cuadradas, cumpliendo así el teorema de Pitágoras:[45] $c^2 = a^2 + b^2$ (figuras 3 y 4).

Por geometría se pasa de las datas rectangulares a cuadradas, de cuadradas a circulares y de circulares a rectangulares y viceversa, manteniendo la misma área

[43] Antonio Plo y Camín, *op. cit.*, pp. 102-103. Probablemente se refiere a un matemático experimentado
[44] *Ibidem*, p. 61.

[45] En este estudio se realizarán las operaciones matemáticas haciendo participar a las unidades de medición que en su caso se elevarán a la segunda potencia, indicándolo como se ha hecho desde la implantación del SMD en México, *u*2 = *unidad* al cuadrado.

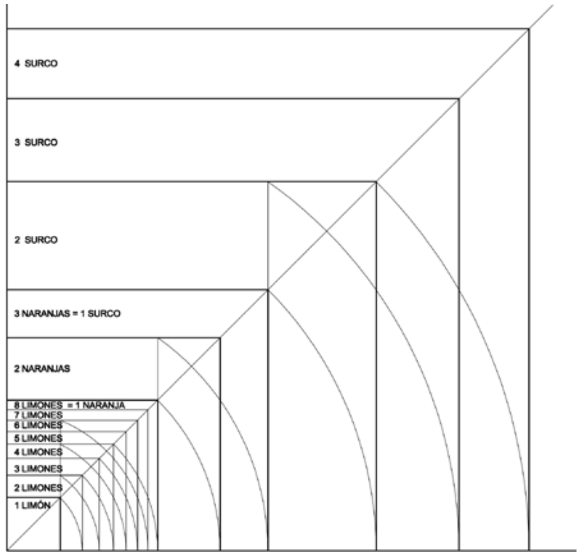

Figura 4. Aplicación de la progresión geométrica de *datas* cuadradas. En este ejercicio se inicia con el área de un *limón* y se culmina con el área de cuatro *surcos*, con la aplicación sucesiva de la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$. Este ejercicio está basado en la figura 7 de Yolanda D. Terán Trillo, "Hidromesura, arquitectura y producción en Nueva España", en *Boletín de Monumentos Históricos*, núm. 16, México, INAH, 2009, p. 46.

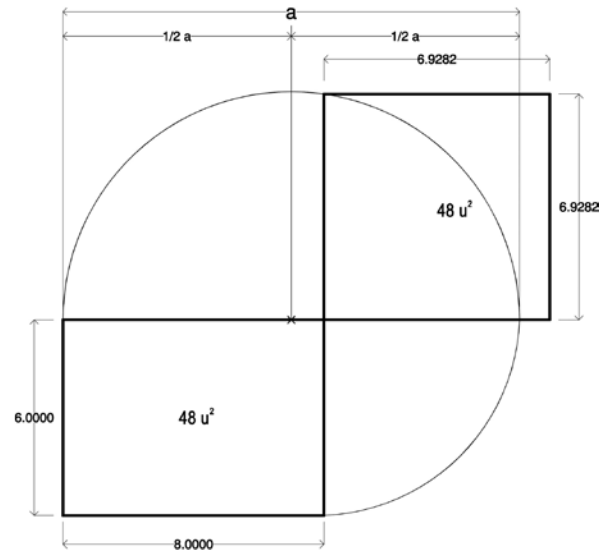

Figura 5. Aplicación de la Proposición XXXVI Convertir cualquier paralelogramo en cuadrado, y cualquier cuadrado en paralelogramo (fig. 43). Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros*, Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767, p. 90.

Hay *datas* que se determinan con rectángulos y las longitudes de sus lados se expresan en *dedos*; el rectángulo del *surco* es de seis por ocho, el de la *naranja* de ocho por dos y el del *real de agua* o *limón* de dos por uno. Si a estas aberturas se les da forma cuadrada, los lados resultan con fracción, salvo la *data* de la *naranja* que, cuando es cuadrada, la longitud de sus lados resultan en números enteros, ya que el rectángulo es de 8 *dedos* × 2 *dedos* = 16 *dedos*^{2}, y el cuadrado de 4 *dedos* × 4 *dedos* = 16 *dedos*^{2}.

Por medio de la geometría, manteniendo el área es posible mudar de una figura a otra, siendo regulares.

Conversión de cualquier rectángulo en cuadrado, y cualquier cuadrado en rectángulo (figura 5)

1. Sea un rectángulo[46] cuyos lados mayores midan $8.^{00}$ *u* y sus lados menores $6.^{00}$ *u*. Su superficie será de 48 u^2.

2. Transpórtese con el compás la longitud del lado menor de la derecha del rectángulo hasta formar una línea horizontal con el lado mayor superior; la línea horizontal resultante es la suma del lado mayor y del lado menor.

3. Obténgase la media de la línea horizontal. Apóyese el compás en el punto medio y trácese medio círculo que irá de un extremo al otro de la línea horizontal.

4. Prolónguese la línea vertical del lado inferior derecho del rectángulo hasta cruzar el semicírculo.

5. La longitud entre el punto donde cruzan las líneas horizontal y vertical al punto donde cruzan la línea vertical con el semicírculo, corresponde al lado del cuadrado que se busca, y si se mide tendrá una longitud de $6.^{9282}$ *u*, que al multiplicarse por sí misma resulta un área de $48.^{00}$ u^2, igual a la del rectángulo.

La razón por la que por medio de la geometría se pasa con la misma área de la figura cuadrada a

[46] El rectángulo podrá medir las longitudes que se deseen, se ejemplifica con las medidas de $8.^{00}$ u × $6.^{00}$ u, que corresponde con las medidas del *surco*, a fin de comprobar que las áreas de ambas figuras son iguales.

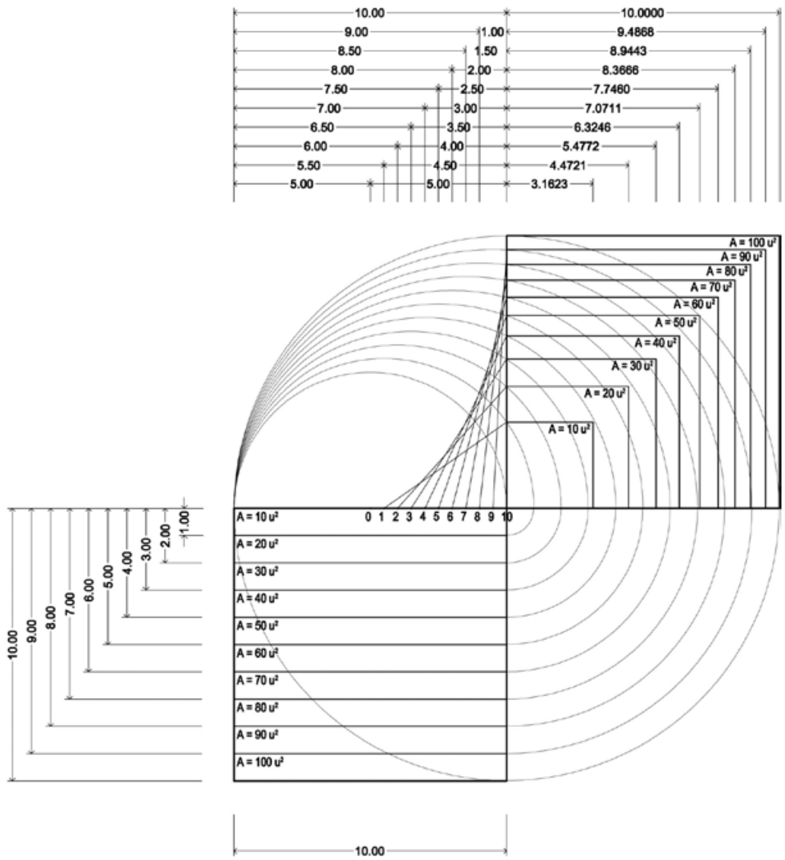

Figura 6. Conversión de figuras rectangulares a cuadradas en los casos extremos. Los radios que a la vez son hipotenusas están dibujados para revelar los triángulos implicados en la fórmula $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

la rectangular, se manifiesta con el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la hipotenusa, y a y b son los catetos de un triángulo implícito en el trazo.

El radio del semicírculo es la hipotenusa c; la distancia del centro del semicírculo al punto de cruce de las líneas horizontal y vertical es el cateto a,[47] el lado del cuadrado es el cateto b. Para comprobar despejamos b de la siguiente manera:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

donde

$$c = \frac{8\,u + 6\,u}{2} = 7\,u,$$

y

$$a = 8\text{ u} - 7\text{ u} = 1\text{ u},$$

por lo cual:

$$b = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 6.^{9282}\,u.$$

La figura 6 ilustra los casos extremos del paso manteniendo el área de rectángulo a cuadrado, desde un rectángulo cuyos lados mayores miden $10.^{00}\,u$ y los menores $0.^{00}\,u$, hasta un paralelogramo cuyos lados miden $10.^{00}\,u$, y los rectángulos inter-

47 La suma de la hipotenusa c y el cateto a es igual al lado mayor del rectángulo.

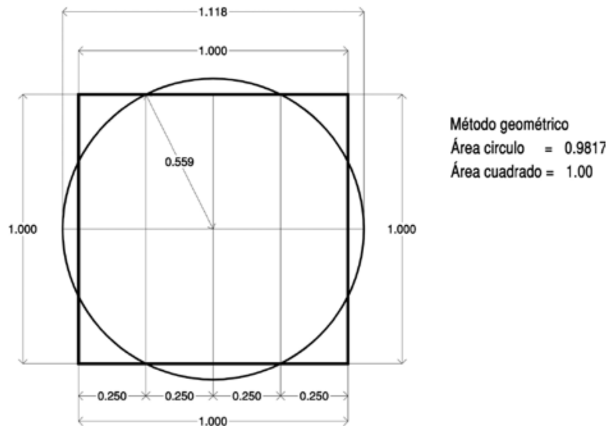

Figura 7. Aplicación de la Proposición XXXVII, 3. Convertir cualquier cuadrado en círculo, Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros*, Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767, p. 93.

medios con lados mayores de $10.^{00}$ u y lados menores que aumentan sucesivamente una unidad, de $0.^{00}$ u hasta $10.^{00}$ u.

Mutación de cualquier *data* cuadrada a circular manteniendo la misma superficie (figura 7)

1. Sea un cuadrado, con área igual a 1 u^2.

2. Trácense los ejes horizontal y vertical.

3. Divídase el eje horizontal en cuatro partes iguales y trácense las líneas que fraccionarán al cuadrado en rectángulos.

4. Apóyese el compás en el cruce de los ejes, y la otra punta en el primero o en el tercer cuarto del cuadrado, y trazar la circunferencia.[48]

El área del círculo[49] resulta de $0.^{9817}$ u^2.

Ante la inexactitud del resultado obtenido, Antonio Plo y Camín recomienda —para una mayor precisión— obtener el diámetro del círculo aplicando raíz cuadrada al resultado de multiplicar el área[50] por $^{11}/_{14}$, cuya fórmula se expresa así:[51]

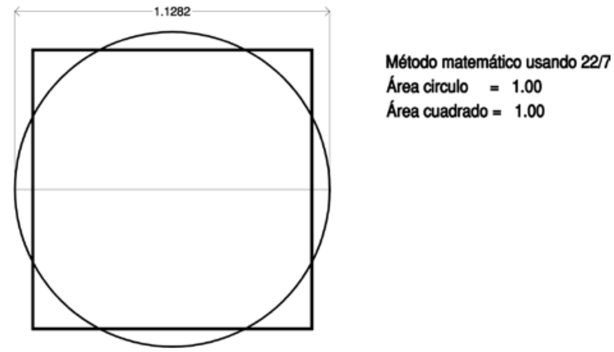

Figura 8. Aplicación de la recomendación de Antonio Plo y Camín de obtener el área del círculo con la fórmula $A = r^2\, 3\, ^1/_7$. Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros,* Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767, p. 94.

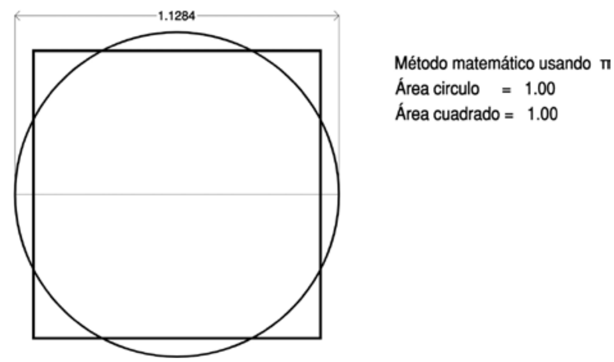

Figura 9. Obtención del área del círculo con la fórmula $A = r^2\, \pi$, para patentizar la exactitud de $A = r^2\, 3\, ^1/_7$.

$$D = \frac{\sqrt{14\,A}}{11}$$

Con la que obtenemos:

$$D = \frac{\sqrt{14\,A}}{11} = 1.^{128152149};\ r = {}^{D}/_{2} = 0.^{564076074}.$$

El área del círculo será: $A = r^2\, 3\, ^1/_7$ (figura 8), de donde:

$$A = {}^{22}/_{7}\,(0.^{564076074})^2 = 1\ u^2.$$

Si se obtiene el círculo empleando π (figura 9), hacemos lo siguiente:

[48] La *línea* que une el centro con el primero o tercero de los cuartos del cuadrado es el radio del círculo buscado.

[49] Antonio Plo y Camín, *op. cit*., p. 94, "[…] círculo cuya área será igual al cuadrado, aunque no con toda precisión; porque aunque es poca la diferencia, siempre será algo mayor el cuadrado, que el círculo".

[50] Se refiere al área de la figura cuadrada.

[51] Antonio Plo y Camín, *op. cit*. Textualmente dice: "mídase el área del cuadrado, y los *pies* o *varas* que salieren, multiplíquense por 11, y el producto de todo pártase a 14; y de lo que viniere en la partición sáquese la raíz cuadrada, y ésta será el diámetro del círculo que se pide".

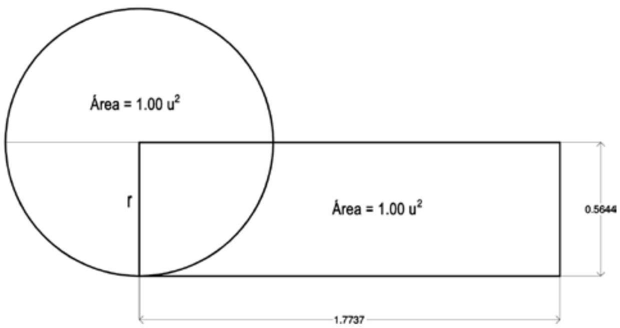

Figura 10. Aplicación de la Proposición XXXVII, 1. Convertir cualquier círculo en paralelogramo (fig. 44). Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros*, Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767, pp. 92-93.

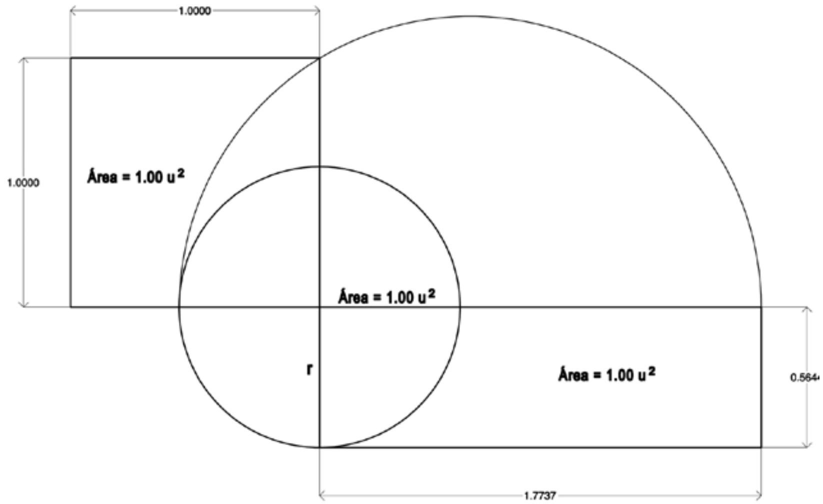

Figura 11. Aplicación de las proposiciones XXVI y XXXVII, 1. Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros*, Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767. Para obtener un cuadrado con la misma área que el círculo.

$$D = 2\sqrt{A/\pi} = \sqrt{4/\pi} = 1.^{128377847} \quad r = {}^{D}/_{2} = 0.^{564188923}.$$

El área del círculo será: $A = r^2 \pi$, de donde

$$A = (0.^{564188923})^2 \pi = 1\ u^2.$$

Transformación de círculo a rectángulo (figuras 10 y 11)

1. Sea un círculo de 1 u^2.

2. Trácese el diámetro en el eje horizontal, y el radio en el eje vertical del centro hacia abajo.

3. Sobre el diámetro, a partir del centro, trácese una línea con longitud igual a la del radio multiplicado por 3 $^1/_7$ y formar la figura con las líneas paralelas necesarias. El lado menor del rectángulo es el radio, y se explica de la siguiente manera: $A = r^2 \times 3\,^1/_7$, o su equivalente, actualmente en uso: $A = r^2 \pi$.

Tablas del siglo XIX que aportan medidas de *datas de agua*

Quienes tenían que trabajar con las medidas de las *datas de agua* se apoyaban en tablas como las que se muestran en las figuras 12 y 13.

La tabla de la figura 12, publicada en 1842, expresa las secciones de las ranuras, sean cuadradas o circulares en *pulgadas* cuadradas y sus fracciones en diez milésimas de *pulgada* cuadrada y los diámetros de las *datas* circulares en *pulgadas* lineales y fracciones en centésimas de *pulgada*.

La tabla de la figura 13, publicada en 1868, formula las áreas de las *datas*, expresadas en *pulgadas* cuadradas, y sus fracciones en quebrados, que se sobreentiende están en la segunda potencia, y los diámetros en *pulgadas* y sus fracciones en quebrados cuyo divisor es 100.

Sabemos que la *pulgada* se subdivide en cuatro *pajas* o en 12 *líneas*, o en 144 *puntos*, y que la *pulgada* cuadrada a su vez se subdivide en 16 *pajas* cuadradas, o en 144 *líneas* cuadradas o en 1 728 *puntos* cuadrados.

Si contamos con una regla de medir con el señalamiento de esas subdivisiones podremos transportarlas ya sea a las láminas de plomo con que se hacían los tubos, o podríamos medir con ellas sus diámetros o lados sobre bloques de piedra o madera según sea el caso.

La tabla de la figura 13 expresa las cantidades en *pulgadas* y en fracciones a modo de quebrado. En ambos casos resulta ardua la medición con la regla que arriba se comenta.

TABLA

Que manifiesta las medidas mexicanas que sirven para mercenar las aguas, y cuyos nombres son como siguen.

Un buey, que consta de una vara cuadrada.
Un surco, que es la 48 ava parte del buey.
Una naranja, que es la tercera parte del surco.
Un real, que es la octava parte de la naranja.
Una paja, que es la décima octava parte del real.

Superficie que deben tener las referidas datas, sean restangulares ó circulares.			Superficie de los cuadrados circunscritos á las datas circulares.		Raices de los antecedentes y diámetros de las datas circulares.	
PULGADAS CUADRADAS.		Diez milésimas de pulgadas cuadradas.	Pulgadas cuadradas.	Diez milésimas de pulgada cuadrada.	Pulgadas lineales.	Centésimos de pulgada.
El buey	1296	0000	1651	0000	40	63
El surco ...	27	0000	34	3900	5	86
2 naranjas.	18	0000	22	9300	4	79
1 naranja..	9	0000	11	4650	3	39
7 reales ...	7	8750	10	0318	3	17
6 rs.......	6	7500	85	5987	2	93
5 rs.......	5	6250	7	1656	2	68
4 rs.......	4	5000	5	7325	2	39
3 rs.......	3	3750	4	2993	2	17
2 rs.......	2	2500	2	8662	1	69
1 rl.......	1	1250	1	4331	1	19
17 pajas....	1	0625	1	3536	1	16
16 id.......	1	0000	1	2740	1	13
15 id.......	0	9375	1	1944	1	09
14 id.......	0	8750	1	1148	1	02
13 id.......	0	8152	1	0352	0	98
12 id.......	0	7500	0	9556	0	94
11 id.......	0	6875	0	8756	0	89
10 id.......	0	6250	0	7960	0	85
9.........	0	5625	0	7116	0	80
8.........	0	5000	0	6370	0	75
7.........	0	4375	0	5574	0	69
6.........	0	3750	0	4778	0	63
5.........	0	3125	0	3980	0	56
4.........	0	2870	0	3181	0	49
3.........	0	1875	0	2389	0	40
2.........	0	1250	0	1592	0	28
1.........	0	0625	0	0796	0	27

Figura 12. Tabla que manifiesta las medidas mexicanas que sirven para mercedar las aguas. Antonio Plo y Camin, *El arquitecto práctico, civil, militar, y agrimensor, dividido en tres libros*, Madrid, Imprenta de Pantaleón Aznar, 1767, p. 137.

TABLA II.

Medidas ó tomas de agua, con expresion de sus diámetros ó lados de los cuadrados circunscritos á ellas, y de sus áreas ó superficies.

DATAS ó TOMAS CIRCULARES.	Diámetros de las datas circulares ó lados de los cuadrados circunscritos á ellas, expresados en pulgadas.	Areas de las datas, expresadas en pulgadas cuadradas.	DATAS CIRCULARES.	Diámetros ó lados de los cuadrados circunscritos á las datas, expresados en pulgadas.	Areas de las datas, expresadas en pulgadas cuadradas.
1 buey ó 48 surcos. .	$40\frac{80}{100}$	1296	13 p.	$1\frac{2}{100}$	$0\frac{13}{16}$
1 surco ó 3 naranjas.	$5\frac{86}{100}$	27	12 p.	$0\frac{98}{100}$	$0\frac{3}{4}$
1 naranja ú 8 reales.	$3\frac{38}{100}$	9	11 p.	$0\frac{94}{100}$	$0\frac{11}{16}$
7 reales.	$3\frac{17}{100}$	$7\frac{7}{8}$	10 p.	$0\frac{89}{100}$	$0\frac{5}{8}$
6 reales.	$2\frac{93}{100}$	$6\frac{3}{4}$	9 p.	$0\frac{85}{100}$	$0\frac{9}{16}$
5 reales.	$2\frac{66}{100}$	$5\frac{5}{8}$	8 p.	$0\frac{80}{100}$	$0\frac{1}{2}$
4 reales.	$2\frac{39}{100}$	$4\frac{1}{2}$	7 p.	$0\frac{75}{100}$	$0\frac{7}{16}$
3 reales.	$2\frac{7}{100}$	$3\frac{3}{8}$	6 p.	$0\frac{69}{100}$	$0\frac{3}{8}$
2 reales.	$1\frac{69}{100}$	$2\frac{1}{4}$	5 p.	$0\frac{63}{100}$	$0\frac{5}{16}$
1 real ó 18 pajas. . .	$1\frac{20}{100}$	$1\frac{1}{8}$	4 p.	$0\frac{56}{100}$	$0\frac{1}{4}$
17 pajas.	$1\frac{16}{100}$	$1\frac{1}{16}$	3 p.	$0\frac{48}{100}$	$0\frac{3}{16}$
16 pajas.	$1\frac{13}{100}$	1	2 p.	$0\frac{39}{100}$	$0\frac{1}{8}$
15 pajas.	$1\frac{9}{100}$	$0\frac{15}{16}$	1 p.	$0\frac{28}{100}$	$0\frac{1}{16}$
14 pajas.	$1\frac{5}{100}$	$0\frac{7}{8}$			

Figura 13. Tabla II. Medidas o tomas de agua con expresión de sus diámetros o lados de los cuadrados circunscritos a ellas, y de sus áreas o superficies. Mariano Galván, *Ordenanzas de tierras y aguas*, París, Librería de Rosa y Bouret, 1868, p. 256.

Lectura de las tablas de las figuras 12 y 13

Hemos visto que el *buey* es la superficie de una *vara* cuadrada; si la *vara* mide 36 *pulgadas* lineales, el *buey* tendrá una superficie de 1 296 *pulgadas* cuadradas, que es el producto de multiplicar el lado de 36 *pulgadas* por el otro lado de 36 *pulgadas* o (36 *pulgadas*)^2. El *surco* es el resultado de dividir las 1 296 *pulgadas*^{2} del *buey* entre 48, que da como resultado las 27 *pulgadas*^{2} de su superficie. Al dividir las 27 *pulgadas*^{2} del *surco* entre 3, obtenemos la superficie de una *naranja* que mide 9 *pulgadas*^{2}. Al multiplicar las 9 *pulgadas*^{2} por 2, el resultado es la superficie de la *data* que mide 2 *naranjas*. Cuando dividimos las 9 *pulgadas*^{2} de la *naranja* entre 8, tenemos la superficie de la *data* de un *real* o *limón,* que es de 1.^{1250} *pulgadas*^{2}, que es la misma cantidad que 1 $^1/_8$ *pulgadas*^{2}. Las superficies de las *datas* de 2, 3, 4, 5, 6 y 7 *reales* se obtendrán realizando la multiplicación de la superficie de un *limón* por la cantidad de *limones* correspondiente. Ejemplificaré con la *data* de 4 *reales*:

$$1.^{1250}\ \textit{pulgadas}^2 \times 4 = 4.^{5\,000}\ \textit{pulgadas}2$$

o bien:

$$1\ {}^1/_8\ \textit{pulgada}^2 \times 4 = 4\ {}^1/_2\ \textit{pulgadas}^2$$

Si bien las *datas* del *buey* y de la *paja* se explican con figuras cuadradas, las demás aberturas se expresan por medio de rectángulos, con sus lados dimensionados en dedos, ya que al multiplicarse entre sí para obtener el área, el resultado se logra en números enteros; sin embargo, dada la necesidad de realizar caños de forma cuadrada, a las de forma rectangular se les puede dar esa forma. Por medio de las matemáticas, el lado del cuadrado se obtiene aplicando la raíz cuadrada a la superficie del rectángulo, realizando las operaciones como se trató líneas arriba.

Propuesta de una tabla de *datas de agua*

La finalidad de la *Carta de datas de agua cuadradas y circulares* (figura 14) es crear un instrumento de trabajo para los historiadores, arqueólogos, restauradores de muebles y arquitectos restauradores que en su quehacer cotidiano se relacionen con los sistemas hidráulicos en los que figuran acueductos, cajas de agua, caños o tuberías, acequias y fuentes, ya sea físicamente o mediante documentos, en los que sea necesario el conocimiento de las medidas de las *datas de agua*.

Las medidas del agua de uso común en México se concibieron a partir de la superficie o sección de la abertura por la que emergiera el líquido. La *paja de agua* es la unidad de medición presente en todas ellas, aun cuando al llegar a la superficie de 18 *pajas de agua*, recibe el nombre de *real* o *limón*, y al llegar a los ocho *limones*,[52] se le da el nombre de *naranja*. Así, se continúa con los múltiplos de la *paja* que reciben los nombres de *surco* y *buey*.

A las medidas de las aberturas se les ordenó de menor a mayor, iniciando con la *data* de una *paja de agua* seguida de sus múltiplos; se prosiguió con los múltiplos del *limón*, de la *naranja* y de los *surcos*, hasta el *buey de agua*. Se continuó analizando las medidas de las *datas* con superficies que van de dos a 20 *bueyes*, suponiendo que habrá casos en los que se investigue acerca de acequias, canales o caños de mayor envergadura.

Áreas, secciones o datas

Respecto a la formulación de la tabla, se inició con la obtención de la sección de un *buey*, expresada en puntos. Se eligió el *punto* como común denominador porque al ser la menor medida del sistema empleado en México durante el Virreinato y el siglo XIX, se logrará una mayor aproximación en las dimensiones de las *datas*.

El área del *buey* en *puntos* se dividió entre 48, con lo que se logró la sección de un *surco*. Esta área se multiplicó por cada uno de los 46 múltiplos del *surco* faltantes, obteniendo así cada una de sus áreas.

La superficie del *surco* en *puntos*, se dividió entre tres para establecer la sección de una *naranja* que se multiplicó por dos para obtener el área de la *data* de dos *naranjas*.

El área de una *naranja* en *puntos* se dividió entre ocho y se llegó a la superficie de un *limón*. Al multiplicar el área del *limón* por cada uno de sus múltiplos, se obtuvieron las áreas buscadas.

La sección del *limón* expresada en *puntos* se dividió entre 18 y se conoció el área de la *paja*. Al

[52] Que es ocho veces 18 *pajas*.

multiplicar esa superficie por cada uno de sus 16 múltiplos faltantes se obtuvieron las áreas correspondientes.

Se procedió de manera similar para obtener cada una de las secciones de dos a 20 *bueyes* a partir de la superficie de un *buey* en *puntos*.

Lados de las datas cuadradas

Para obtener el lado de cada una de las *datas* cuadradas, con secciones que parten de una *paja de agua* y concluyen en 20 *bueyes de agua*, se sacó raíz cuadrada a cada una de sus áreas: $L = \sqrt{A}$.

Diámetros de las datas circulares

Para establecer el diámetro de cada una de las *datas* circulares, con las secciones arriba mencionadas, se multiplicó el lado correspondiente por la raíz cuadrada de 4 dividido entre π, con esta fórmula: $D = L\sqrt{4/\pi}$, la cual se obtuvo gracias a que el área de la *data* es la misma, ya sea su forma geométrica cuadrada o circular: $A = L^2 = r^2\pi$.

El diámetro mide dos veces el radio: $D = 2r$, si despejamos el radio: $r = \sqrt{A/\pi}$.

Entonces: $D = 2\sqrt{A/\pi}$; de donde: $D = 2\sqrt{L2/\pi}$; por lo tanto: $D = L\sqrt{4/\pi}$.

$$D/L = \sqrt{4/\pi};\ D/L = K;$$

de donde

$$\sqrt{4/\pi} = K.$$

$$K = 1.128377847.$$

Por lo general se trabaja con la fracción hasta la centésima: K = 1. 13, pero a fin de lograr una mayor aproximación, se eligió trabajar con $\sqrt{4/\pi}$ para mantener la fracción hasta la milmillonésima.

Comprobación:

$$L^2 = r^2\pi;\ r = \sqrt{L^2/\pi};\ D/2 = r;$$
$$D = 2\sqrt{L^2/\pi};\ D = L\sqrt{4/\pi}.$$

Circunferencias de las datas circulares

Para conocer la circunferencia de cada una de las *datas* circulares se multiplicaron sus diámetros por π.

Obtención de las dimensiones enunciadas en el sistema empleado en México durante el Virreinato y el siglo XIX

Las seis columnas blancas permiten formular las dimensiones de las *datas* en el sistema de medidas empleado en México durante el Virreinato y el siglo XIX, otorgando a la *vara* y a sus submúltiplos un valor posicional para facilitar su lectura. La primera columna está destinada a la *vara*, la siguiente al *pie*, continúan las correspondientes a la *paja*, a la *línea* y al *punto*, de modo que se lee la dimensión, ya se trate de una longitud o de una superficie, recorriendo las columnas horizontalmente de izquierda a derecha.

En cada una de las secciones, la primera columna en sombra clara contiene la dimensión en *puntos*. Si se trata de una longitud se debe tener en cuenta la cantidad de *puntos* que integran a cada una de las siguientes unidades de medición.

La *línea* consta de 12, la *paja* de 36, el *dedo* de 108, el *pie* de 1 728 y la *vara* de 5 184.

Ante una cantidad *n* de *puntos*, vemos a qué unidad máxima de las arriba mencionadas puede contener y en que número. Haremos lo mismo con los *puntos* sobrantes cada vez hasta llegar a la mínima unidad.

Se tendrá presente que una *vara* se divide en tres *pies*, el *pie* en 16 *dedos*, el *dedo* en tres *pajas*, la *paja* en tres *líneas*, y la *línea* en 12 *puntos*.

Si se trata de una superficie se debe considerar la cantidad de *puntos*^{2} que integran a cada una de las siguientes unidades de medición: la *línea*^{2} consta de 24, la *paja*^{2} de 1 296, el *dedo*^{2} de 11 664, el *pie*^{2} de 2 987 712, y la *vara*^{2} de 26 873 856.

Ante una cantidad *n* de *puntos*^{2} vemos qué unidad máxima de las mencionadas puede contener y en qué número. Haremos lo mismo con los *puntos*^{2} sobrantes cada vez, hasta llegar a la mínima unidad.

Recordemos que la *vara*^{2} se divide en nueve *pies*^{2}, el *pie*^{2} en 256 *dedos*^{2}, el *dedo*^{2} en nueve *líneas*^{2}, la *línea*^{2} en nueve *pajas*^{2}, y la *paja*^{2} en 144 *puntos*^{2}.

Obtención de las dimensiones de las datas de agua en el Sistema Métrico Decimal

Para la conversión al Sistema Métrico Decimal se obtuvo el área del *buey*, ahora expresada en *milímetros* cuadrados. Para la obtención de las áreas, lados, diámetros y circunferencias de cada una de las *datas*, se siguieron cada uno de los pasos descritos con anterioridad.

En cada una de las cuatro secciones, hay tres columnas en sombra intensa que acogen mediciones equivalentes expresadas en la primera columna en *milímetros*, en la intermedia en *centímetros* y en la extrema en *metros*.

Diseño de la tabla

Para sistematizar los datos obtenidos se diseñó una carta de datas constituida por cuatro secciones, que en la parte superior presentan el título que las define: lado, área, diámetro y circunferencia.

La primera sección corresponde a los lados de las *datas* cuadrangulares, la segunda a las áreas de las *datas* independientemente de su forma geométrica, la tercera a los diámetros y la cuarta a las circunferencias; ambas columnas corresponden a las *datas* circulares.

A su vez, cada sección está formada por una primera columna en sombra clara, seguida de seis columnas blancas y de tres columnas en sombra intensa.

En el extremo izquierdo de la carta aparece una columna inmediata a la primera dividida horizontalmente en cinco partes. La primera titula a las 18 *pajas*, la segunda a los 8 *limones*, la tercera a las 3 *naranjas*, la cuarta a los 48 *surcos* y la quinta a 20 *bueyes*, que se enumeran en la columna.

Conclusión

La práctica milenaria de determinar la cantidad de agua a repartir por la sección del encañado por el que emergía fue implantada en América por los españoles. En España la *paja de agua* fue la unidad hidráulica básica; sin embargo, a sus múltiplos se les denominaba con los nombres de *monedas*. En la Nueva España fue también la *paja de agua* la unidad hidráulica básica, y sus múltiplos se denominaron *real* o *limón*, *naranja*, *surco* y *buey*.

Los artesanos que fabricaban los caños y las cajas de agua debían poseer conocimientos matemáticos y geométricos para dimensionar las aberturas en las diferentes formas que se necesitaran. El sistema de medición era exacto, pero complicado. Las mediciones de longitudes y de superficies, aun dentro del mismo sistema convencional de medidas, se expresaban en formas diferentes por sus usuarios.

En este artículo se asumieron la *vara* y el *pie* como su tercera parte, que convencionalmente equivalen en el Sistema Métrico Decimal 84 y 28 cm, respectivamente.

Como el sistema de medición empleado consta de unidades de medición en las que unas son múltiplos o submúltiplos de las otras de forma discontinua, se recurrió al denominador común.

Para medir los círculos y sus componentes es obligatorio tener conocimiento de la proporción que guardan recíprocamente el diámetro y la circunferencia. Algunas propuestas daban una mayor aproximación; sin embargo, se adoptó la de Arquímedes, que determina que la circunferencia es tres veces y un $^1/_7$ el diámetro, por ofrecer la facilidad de requerir de menos números.

Por medio de la geometría se obtienen los múltiplos y submúltiplos de las áreas de las *datas* cuadradas; asimismo es posible convertir cualquier rectángulo en cuadrado aplicando gráficamente el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$), de manera que se obvian las operaciones matemáticas. Los artesanos y los trabajadores de la construcción, valiéndose de la geometría, podían obtener las diferentes figuras geométricas y sus medidas con precisión.

La obtención del círculo a partir de un cuadrado —pretendiendo que ambas figuras sean de la misma área— por medio de la geometría, es imprecisa; se obtiene una mayor aproximación con la razón de Arquímedes arriba enunciada.

La transformación del círculo a rectángulo manteniendo el área es la aplicación gráfica de la fórmula $A = r^2 \times 3\ ^1/_7$, o su equivalente, actualmente en uso: $A = r^2\pi$.

Las tablas con las dimensiones de las *datas de agua* tuvieron el objetivo de auxiliar a los implicados en la distribución del agua. Las analizadas en este artículo expresan las secciones de las ranuras, sean cuadradas o circulares, en *pulgadas* cuadradas, y sus fracciones en diezmilésimas de *pulgada* cuadrada, y los diámetros de las *datas* circulares en *pulgadas* lineales y fracciones en centésimas de *pulgada*.

La finalidad de la *Carta de datas de agua* (figura 14) ha sido crear un instrumento de trabajo para los historiadores, arqueólogos, restauradores de muebles y arquitectos restauradores que en su quehacer cotidiano se relacionen con los sistemas hidráulicos.