JAIME ANTONIO ABUNDIS CANALES

La sección áurea en las artes plásticas

La búsqueda del hombre por encontrar su lugar en el cosmos lo ha llevado a analizar y descubrir el orden y el sentido que es inherente a todo lo que le rodea. La respuesta a sus inquisiciones las ha obtenido desde los ángulos mágico, primero, religioso después y, finalmente, científico. Al reconocer la forma en que los seres se organizan y disponen, el hombre ha descubierto su pertenencia a un mundo natural complejo y maravilloso que, muy frecuente y equivocadamente, cree que fue originado para su particular dominación.

La estructura que organiza a las estrellas en el firmamento, las ramas en el tronco de un árbol, las células en un tejido, los cuernos de un carnero, la concha de los nautilus marinos... fue muy pronto reconocida por el ojo despierto y la mente escudriñadora que se asombró y generó más inquietudes y preguntas. Pero, al margen de las explicaciones, el ser humano trató de remedarlas en sus creaciones propias; su voluntad creadora intentó reproducir en sus obras la estructura organizativa que descubría y le atraía del mundo natural. ¿Cómo, cuándo, dónde empezó todo esto? Estas preguntas no son fáciles de responder; acaso todavía nadie las ha podido contestar de manera clara y satisfactoria. Pero más allá de estas cuestiones teleológicas, es indudable que las primeras creaciones humanas trataron de reproducir lo que el entorno natural les mostraba. Desde lo más oscuro de sus orígenes, cada día se hace más evidente que el hombre trató de reflejar en sus creaciones el orden *cósmico*; conforme adelantó en civilización, este deseo se fue manifestando con mayor claridad y de manera muy especial en lo que hoy llamamos las artes plásticas.

Los orígenes históricos de la sección áurea

Según la cultura occidental, fue en el Oriente Medio, primero en Mesopotamia y luego en Egipto, donde se evidenciaron muestras precisas y preciosas de ese intento. Las estructuras de Hasuna y Eridú, la arquitectura faraónica —con la sobresaliente muestra de las pirámides de Gizeh—, los relieves mesopotámicos, persas y egipcios, entre otras obras escultóricas del mundo oriental, nos muestran meridianamente la extraordinaria forma en que sus creadores habían asimilado las enseñanzas de la naturaleza.

La estatua sedente de Gudea, el rey arquitecto de Sirpurla (2500 a.C.), es el mejor ejemplo para demostrar ese afán humano (fig. 1). Representa a un personaje en posición sedente, sin cabeza, sobre cuyas piernas tiene una especie de tabla (a manera de tablero de dibujo) con un esquema. Es la planta del templo de Ningirsú; junto a ella, un elemento semidestruido parecido a una regla (acaso una regla T incipiente) y una serie de escalas desiguales que fueron seguramente empleadas en el dimensionamiento de aquel templo, y que no dejan lugar a dudas respecto de la profesión del personaje (fig. 2). Estas escalas no son otra cosa que una serie armónica áurea que trataba de emular, en los productos culturales, los cánones de dimensionamiento y proporción naturales.

Ya los arquitectos egipcios habían hecho uso del triángulo denominado pitagórico en la sección meridiana de la segunda pirámide de Gizeh en el cuarto milenio antes de nuestra era. Los arquitectos sasánidas y aqueménidas en Persia también los utilizaban para el trazo de las bóvedas de sus edificios (fig. 3).

Pero es en el mundo helénico donde se encuentran referencias escritas que permiten entrever las inquietudes y aproximaciones del hombre al deseo de que sus obras hicieran eco del orden

Fig. 1. Estatua en diorita de Gudea, existente en el Museo del Louvre.

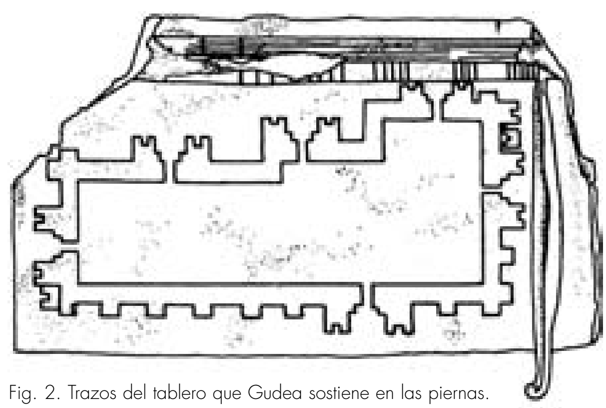


Fig. 2. Trazos del tablero que Gudea sostiene en las piernas.

natural. Muy frecuentemente se cree que fueron los griegos quienes inventaron estos conceptos, pero ellos solamente sintetizaron y organizaron conocimientos más antiguos, sobre todo a partir de Pitágoras. Así pues, la gran pirámide de Keops en Gizeh, Egipto (fig. 4), construida hacia el año 3733 a.C., ha evidenciado a la investigación ac-

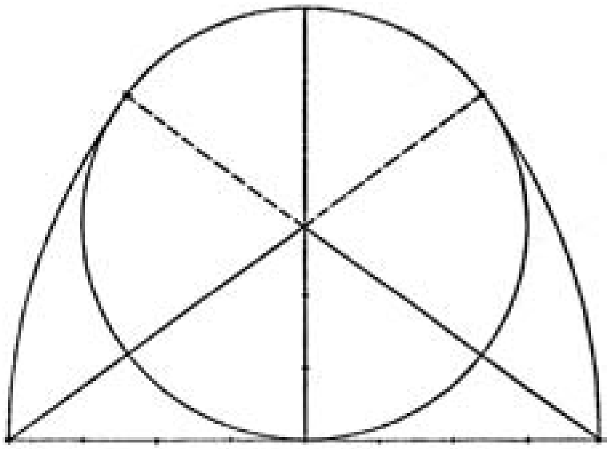


Fig. 3. Trazo geométrico de una bóveda por los arquitectos sasánidas y aqueménidas con apoyo en dos triángulos.

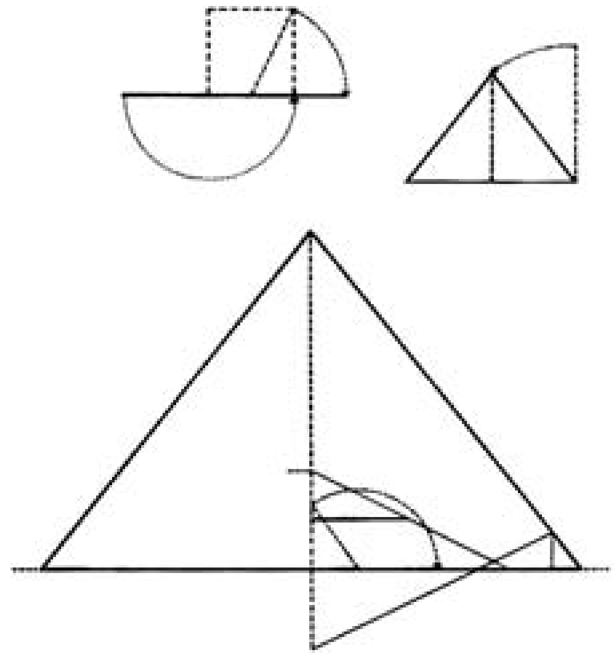


Fig. 4. Trazo meridiano de la pirámide de Keops en Gizeh.

tual que fue diseñada con el sistema de proporciones hoy reconocidas como áureas y empleando los llamados triángulos pitagóricos tres mil años antes de Pitágoras.

De entre la pléyade de sabios de la antigüedad helénica, Pitágoras es una figura sobresaliente. Nacido alrededor de 580 a.C. en Samos, Jonia, y muerto *ca.* 500 en Metapontum, tuvo una vida agitada e interesante. Viajó a Egipto y también estuvo en Asia Menor (algunas tradiciones lo convirtieron en asiduo visitante de las soledades del monte Carmelo en Palestina, donde gustaba de retirarse a meditar). Tuvo que emigrar al sur de la península itálica hacia el año 532 a.C. para escapar del gobierno tiránico establecido en su provincia natal; se asentó en Crotón (hoy Crotona) donde fundó su academia ético-política y científica hacia 525 a.C. Esta academia o cenáculo pitagórico,[1] aunque de naturaleza esencialmente religiosa, formuló principios que luego influyeron en los pensamientos de Platón y Aristóteles, y contribuyeron al desarrollo de las matemáticas y de la filosofía natural occidental.

[1] Cenáculo, en sentido figurado significa un conjunto de personas que se mantienen aparte.

No se ha conservado ninguno de sus escritos y es difícil distinguir sus enseñanzas de las de sus discípulos, los que invariablemente reforzaban sus doctrinas apoyándose en la autoridad del maestro (*magister dixit*). Sin embargo, es a Pitágoras a quien se le acredita, por lo general, la teoría del significado funcional de los números en el mundo de los objetos y en la música. Los postulados principales establecidos por el cenáculo pitagórico eran:

- La realidad es de una naturaleza matemática en su nivel más profundo.
- La filosofía puede usarse como vía de purificación espiritual.
- El alma puede elevarse hasta fundirse en un todo con lo divino.
- Ciertos símbolos tienen un significado místico (como lo tuvo la llamada pentalfa o estrella de cinco puntas que empleaban los pitagóricos para identificarse entre sí).

• Todos los hermanos, cofrades o iniciados del cenáculo debían *estricta lealtad y secreto a su organización* (norma de la cual derivará el secreto que más tarde impondrán los gremios de constructores a sus miembros).

Más que una escuela filosófica, el cenáculo pitagórico fue una hermandad religiosa encauzada a la reforma moral de la sociedad (fig. 5). Tenía mucho en común con las llamadas comunidades órficas, que buscaban la purificación del alma del creyente para así permitirle escapar de la "rueda del nacimiento", es decir, del destino fatal, mediante ritos y abstinencias o ejercicios ascéticos.

A causa de su involucramiento en cuestiones políticas, el cenáculo fue perseguido y severamente reprimido por Cylon, monarca que llegó, incluso, a confinar a Pitágoras en Metapontum, donde residió hasta su muerte. A mitad del siglo V a.C., el cenáculo fue suprimido con violencia; sus recintos, saqueados e incendiados. Se ha mencionado, particularmente, lo acontecido en la casa de Milo en Crotón, donde 50 o 60 pitagóricos fueron sorprendidos y masacrados; los pocos sobrevivientes se refugiaron en Tebas y otros sitios. La filosofía pitagórica se extinguió hacia la mitad del siglo IV a.C.

Los siguientes principios éticos y filosóficos son el legado de los pitagóricos:

• La sentencia de que "todo es número" se refiere a que todas las cosas pueden reducirse a relaciones numéricas en última instancia.
• La dependencia de la dinámica de la estructura del mundo en la interacción de contrarios o pares de opuestos, esto es, en la dialéctica.
• La creencia de que el alma no es sino una experiencia numérica autogestiva como forma de *metempsicosis* o sucesiva reencarnación en especies diferentes hasta su purificación eventual (en especial mediante la vida intelectual de los pitagóricos éticamente rigurosos).
• Y la idea de que todos los objetos existentes estaban compuestos esencialmente de forma y no de una sustancia material, de acuerdo con la tradición presocrática.

Fig. 5. Pitágoras representado en relieve en un medallón hecho entre 410 y 395 a.C., guardado en la Biblioteca Nacional de París.

La doctrina pitagórica aplicó las relaciones numéricas a las razones y proporciones, la teoría musical, la acústica, la geometría y la astronomía, identificó al cerebro como el asiento del alma y prescribió ciertas prácticas de culto secretas que, en sentido amplio, generaron el principio de secrecía de muchas sociedades, hermandades y gremios posteriores.

La escuela pitagórica influyó con gran fuerza en el desarrollo de la filosofía griega clásica y el pensamiento europeo medieval, particularmente cuando postuló que toda conducta humana era afectada por la *armonía numérica del universo*.

Nicolás Copérnico refirió los conceptos astronómicos pitagóricos como fuentes en su hipótesis heliocéntrica, en la que la Tierra y los planetas giraban en órbitas alrededor del Sol, y no como Ptolomeo lo enseñaba anteriormente en su concepción geocéntrica.

A Pitágoras se debe la adopción del trazo como una de las formas de expresión de la geometría; él también acuñó el término *cosmos* para significar el orden de la naturaleza. En otro sentido, propuso el camino de la geometría como un medio para, según él, purificar el alma al descubrir el orden del cosmos y reproducirlo en sus creaciones, llegando así a la fusión con la divinidad.

Pero, ¿qué es la geometría? Etimológicamente, es la "medida de la tierra" y es, de hecho, una de las ramas más antiguas de las matemáticas, que debió surgir como respuesta obligada a necesidades prácticas, como las mediciones de las tierras de cosecha para controlar su tenencia, su producción y el pago de los tributos. Actualmente la entendemos como la rama de las matemáticas que trata las propiedades del espacio y de los cuerpos en él contenidos. Con el paso del tiempo se descubrió que la geometría no necesariamente debía circunscribirse al estudio de las superficies planas (geometría plana) y de los objetos rígidos tridimensionales (geometría de los sólidos), sino que aun los pensamientos e imágenes más abstractos podían representarse y desarrollarse en términos geométricos. Según las palabras de Hans Biedermann:

> El descubrimiento de que unas cuerdas vibratorias cuyas longitudes pueden expresarse mediante sencillas relaciones numéricas producen acordes de sonido agradable llevó a la postulación del concepto "armonía" en el sentido en que hoy lo entendemos, y fue al propio tiempo el primer paso en el camino de formular matemáticamente la experiencia del mundo. Según ello, toda forma puede expresarse mediante números ("todo es número") que, cual "arquetipos divinos", están escondidos en el mundo y se hacen evidentes al traslucirse el universo mediante ellos [...].[2]

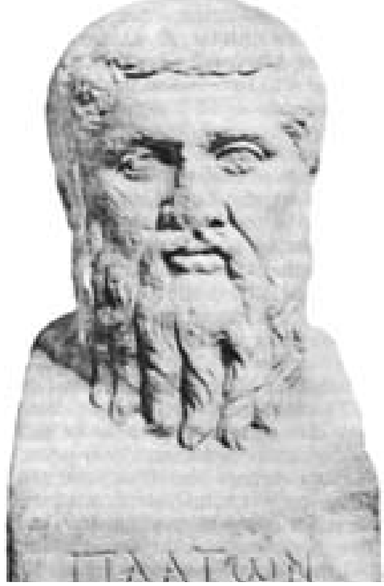


Fig. 6. Platón en un busto romano del siglo IV a.C., probablemente copiado de un original griego existente en el Museo del Estado de Berlín.

Además de la figura de Pitágoras, resaltan otros filósofos y matemáticos del mundo helénico, en su calidad de sintetizadores de la sabiduría numérica y geométrica de la antigüedad. Los siguientes fueron algunos de ellos:

Platón (427-347 a.C.), connotado filósofo, discípulo de Sócrates, nacido y muerto en Atenas, fundó la Academia de esta ciudad en el año 387 (fig. 6). Ordenó labrar una sentencia famosa en el dintel de su entrada: "Nadie que no sea geómetra entre bajo mi techo." También visitó Egipto y es el sabio griego que más meditó acerca de la proporción y la armonía. En sus famosos *Diálogos*, en "Timeo o de la naturaleza" —escrito en su ancianidad—, se refieren relaciones numéricas de probable origen pitagórico que se encuentran en la base de los trazos armónicos, conforme normas vinculadas con la geometría y únicamente reservadas a los iniciados. Timeo de Lócrida fue un pitagórico contemporáneo de Sócrates, acaso maestro de Platón; gran astrónomo, que escribió de las matemáticas y la naturaleza a la manera de Pitágoras.

Euclides fue un matemático griego a quien se reputa como el padre de la geometría y quien vivió hacia el año 300 a.C. Este sabio no solamente visitó Egipto, sino que vivió ahí algunos años y

[2] Hans Biedermann, *Diccionario de símbolos*, trad. Juan Godo Costa, Barcelona, Paidós Ibérica, 1991, p. 326.

llegó a ser maestro en Alejandría. Además de filosofar en torno a la geometría, trató acerca de la armonía. Fue el autor de los llamados *Elementos*, piedra angular de la geometría euclidiana; en ellos subsumió los conocimientos geométricos físicos que habían desarrollado diferentes culturas anteriores derivados de las relaciones entre las dimensiones, las áreas y los volúmenes de los objetos. Con diez axiomas como base, de los que derivan cientos de postulados, probados por medio de la lógica deductiva, la geometría euclidiana epitomó el método axiomático-deductivo empleado luego por siglos. Los conceptos geométricos euclidianos yacen en los cimientos del análisis de proporción armónica y de los trazos áureos en particular.

Arquímedes, griego nacido y muerto en Siracusa, Sicilia (*ca.* 287-212 a.C.), también visitó Egipto. Generalmente se evoca su figura en los terrenos de la física (bastaría el principio hidrostático o de Arquímedes, que explica la flotación de las naves, o la invención del tornillo de su nombre para elevar el agua, o las varias máquinas de guerra que ideó, como méritos suficientes para recordarlo), pero sus descubrimientos fueron mayormente geométricos. De los muchos tratados que escribió sobreviven nueve, de los cuales cinco son los más famosos. Su descubrimiento más notable en el campo matemático fue la relación entre la superficie y el volumen de una esfera y el cilindro circunscrito.

Nicómaco, matemático oriundo de Gerasa, en la Siria romana (hoy Jarash, Jordania), nacido alrededor del año 100 de nuestra era, fue un filósofo y matemático neopitagórico. Escribió *Introducción a la aritmética*, un tratado sobre la teoría numérica de gran autoridad por siglos; pero además nos legó otros dos grandes tratados sobre la materia que nos ocupa: *Manual de armonía*, sobre la teoría musical pitagórica, y *La teología de los números* (del cual sólo sobreviven fragmentos desafortunadamente), que versa de las propiedades místicas de los números.

Los cenáculos pitagóricos se convirtieron en el antecedente de los *collegia* romanos (del latín *collegium*, de *colligere*, a su vez de *legere*: leer en conjunto o en grupo), que se convertirían en las agrupaciones de los constructores o iniciados en los secretos de la geometría y los trazos. En la antigüedad, un *collegium* era una comunidad de personas que vivían en una casa destinada a la enseñanza de las ciencias, las artes y los oficios, bajo el gobierno de ciertos superiores y reglas; su vínculo con los cenáculos pitagóricos es más que evidente.

No sería absurdo pensar que Marco Lucio Vitruvio Polión (*Marcus Lucius Vitrivius Pollio*), quien vivió en el siglo I de nuestra era, haya sido un miembro de tales *collegia* latinos (fig. 7). Este arquitecto e ingeniero romano fue el autor del célebre tratado *De architectura*, manual de los arquitectos de su tiempo, escrito después del año 27 d.C., que se basó en sus propias experiencias como constructor y en las obras teóricas de arquitectos griegos famosos, como Hermógenes. Su tratado, aunque cubre casi todos los aspectos de la arquitectura, está limitado a los modelos griegos, a partir de los cuales la arquitectura romana pronto partiría para proclamar el nuevo imperio. *De architectura* está dividido en 10 libros (de ahí que se le conozca más como *Los diez libros de la arqui-*

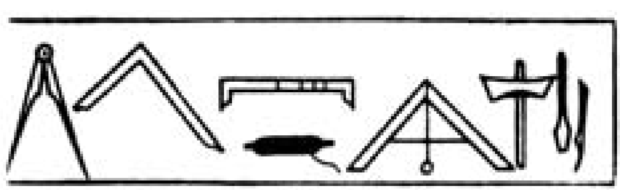


Fig. 7. Tallas de instrumentos constructivos usados por un arquitecto romano en una lápida funeraria de los primeros siglos de nuestra era.

tectura) en los que trata de la planeación de ciudades y arquitectura en general, los materiales de construcción, la edificación de templos y el uso de los órdenes griegos, los edificios públicos (baños, teatros, etcétera), los edificios privados, los pavimentos y la decoración en estuco, la hidráulica, los relojes, la conmensuración, la astronomía y las máquinas civiles y militares. La visión vitruviana es esencialmente helenística y, por lo tanto, basada en los conocimientos pitagóricos. No está por demás recordar que su texto permaneció largos siglos fuera de la vista de los constructores y geómetras, hasta que fue descubierto en la biblioteca de la abadía de Monte Cassino en Italia a la mitad del siglo XV, convirtiéndose en el modelo de los grandes tratadistas del Renacimiento: Leone Battista Alberti, Diego Sagredo, Sebastiano Serlio, Giaccomo Vignola, Andrea Palladio, Juan de Arfe y Villafañe, Vicenzo Scamozzi, fray Andrés de San Miguel, entre otros.

Las grandes construcciones de la Roma imperial permitieron la preservación de los colegios de constructores que mantuvieron viva la tradición de los geómetras griegos. Pero fue con el advenimiento del cristianismo y, sobre todo, a partir de que Pacomio, monje egipcio que estableciera la vida religiosa en comunidad, que tales colegios habrían de sufrir una notable expansión. La fundación y la edificación de los monasterios medievales, primero, y de las catedrales después, requirieron de una legión de constructores especializados que pronto se organizaron en gremios, continuando con la mejor tradición del cenáculo pitagórico y, por supuesto, con el secreto y la lealtad de los iniciados en los conocimientos de la geometría.

Dichos gremios habrían de realizar un sinnúmero de edificaciones entre los siglos IV y X. Abrevaron en las fuentes del pasado por medio de los tratados de la antigüedad. Su fuerza creció gradualmente hasta el punto en que reyes, papas, obispos y abades les reconocieron derechos insospechados para otros grupos; tenían la facilidad de poder viajar libremente para ejecutar sus obras, entre otros privilegios, convirtiéndose así en albañiles itinerantes y libres (*francmaçons*).

La fundación de la escuela de canteros de *Mont Saint-Michel* y el inicio del legendario monasterio de Cluny se suscitaron en el mejor momento de los gremios de constructores, depositarios de los secretos del trazo. Estos gremios no fueron meras corporaciones laborales, sino que muy pronto adquirieron el fuerte carácter iniciático de las auténticas hermandades, con ritos y ceremoniales particulares.

Así surgió el primer gran maestro francmasón, Edwin,[3] fundador de la Gran Logia de York. A él se atribuye la concepción de los símbolos masónicos por antonomasia: compás de plata con puntas doradas, escuadras de oro y cuchara de albañil plateada. El término francmasón, albañil franco o libre (derivado del germánico *makjo* que en latín dio *machio*, *machionis*), aludía a los privilegios extraordinarios concedidos a los constructores por las autoridades civiles y religiosas de la Edad Media; su condición de siervos los hubiera arraigado en un sitio y les habría impedido desplazarse con libertad para edificar no solamente monasterios y catedrales, sino palacios, fortalezas y diversos artificios de paz y de guerra. Estos gremios iniciáticos tuvieron las mejores condiciones de desarrollo entre los siglos XI y XIII, dejando como mudos testimonios de su esplendor, organización y eficacia las extraordinarias construcciones románicas y góticas que hoy son objetos de admiración.

[3] No debe confundirse a este Edwin con su homónimo rey de los ingleses, primer monarca cristiano anglosajón de Northumbría entre 616 y 632 d.C.

Fig. 8. Grabado en madera de un arquitecto alemán con libro, escuadra, plomada y compás, hecho en 1536.

La francmasonería evolucionó a partir de los gremios de canteros y constructores medievales. Al declinar la construcción de catedrales y monasterios, algunas logias de albañiles prácticos (masonería operativa) comenzaron a aceptar miembros honorarios para reforzar sus hermandades declinantes (fig. 8). De unas pocas de esas logias surgió la francmasonería especulativa o masonería a secas, como hoy se le designa, que adoptó los ritos y los usos de las antiguas órdenes religiosas y de las hermandades caballerescas medievales, sobre todo en los siglos XVII y XVIII; pero esta masonería especulativa ya nada tenía que ver con los gremios de constructores medievales. En la actualidad son asociaciones de ayuda mutua y defensa de una ideología racional en política y religión; sus integrantes forman una hermandad cerrada con tres jerarquías bien definidas que derivan de los albañiles prácticos: aprendices (alumnos), colegas (oficiales iniciados) y grandes maestros (enterados), quienes celebran reuniones con ciertos ritos. En la base de su ideología se supone la existencia de un ser o hacedor supremo y la inmortalidad del alma. Sus enseñanzas conjuntan principios morales, caritativos y de obediencia a las leyes locales.

Desafortunadamente, de manera análoga a lo acontecido con los cenáculos pitagóricos y los *collegia* romanos, pocos documentos de los gremios y artesanos medievales han sobrevivido hasta nuestros días; entre ellos destaca el del constructor Wilars de Honcort —cuyo nombre modernizado en el siglo XIX es Villard de Honnecourt—, quien trabajó para la orden del Císter entre los años 1220 y 1250. Su sapiencia le hizo famoso en su momento, tanto que fue invitado a trabajar hasta en Hungría.[4] Su manuscrito titulado *Livre de Portraiture* (*Libro de portretura o porturatura*, es decir, libro de trazo o representación) fue un buen catálogo de los conocimientos para el iniciado en los secretos de la construcción y su génesis en el trazo que guardaban celosamente lo gremios de la Baja Edad Media. Parece indudable que su texto estaba dirigido a los iniciados y los enterados, que no a los neófitos o aprendices y, menos aún, a los profanos. Los elocuentes ejemplos de la arquitectura gótica muestran el grado de perfección en el trazo, las proporciones, la armonía y sus relaciones numéricas a que llegaron los artistas medievales (fig. 9). En uno de los primeros párrafos de su texto señala lo siguiente:

[4] Carlos Chanfón Olmos, *Wilars de Honecort. Su manuscrito*, México, UNAM, 1994, p. 7.

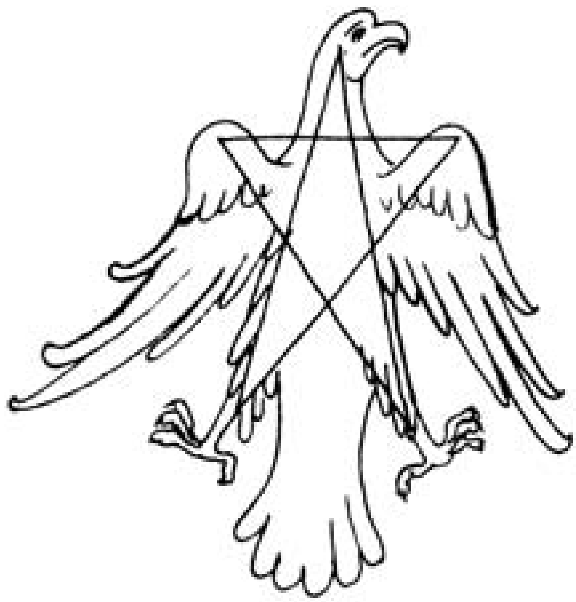


Fig. 9. Águila trazada sobre una pentalfa irregular en el folio 18v. del manuscrito de Honcort.

> Wilars de Honcort os saluda y ruega a todos los que trabajarán con estos ingenios que se encontrarán en este libro, que rueguen por su alma y se acuerden de él. Porque en este libro se pueden encontrar buenos consejos de la gran fuerza de la albañilería y de los ingenios de carpintería y aquí encontrarás la fuerza del dibujo de representación, los trazos, tal como el arte de la geometría los manda y enseña.[5]

En el clímax de su desarrollo, los siglos XIII y XIV, se inició la decadencia de los grandes gremios de constructores. Comenzó entonces un movimiento de los sabios quienes, sobre las bases islámicas herederas directas del mundo clásico grecolatino, emprendieron un viaje de retorno a los principios de la antigüedad. Pero se debe enfatizar la aportación de los grandes matemáticos y sabios mahometanos, particularmente de Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850), autor de los textos R*estauratio et oppositio* y *Liber algoritum*, y a Umar Ibrahim al-Khayyam (muerto en 1123), quien escribió *Algebra* y *De difficultatibus in Euclides definitionibus*.

Los postulados homocentristas del Renacimiento no acogieron bien las ideas de aislamiento y hermetismo medievales. La curiosidad renacentista hacia el mundo clásico se evidenció con el "descubrimiento" del libro de Vitruvio en la abadía de Monte Cassino a mediados del siglo XV. Junto a ese interés por lo clásico, surgió el concepto del artista creador —concepto emanado del homocentrismo— que decretó el fin de la estructura gremial, más fundada en el concepto del artesano. En su búsqueda racional de los principios de belleza, el Renacimiento se obsesionó por investigar las raíces de la proporción que se evidenciaban en la armonía entre lo humano y lo natural, entre el micro y el macrocosmos.

Surgieron así personajes notables como Leonardo Fibonacci o Pisano, quien con sus libros *Liber abaci*, *Practica geometriae* y *Liber quadratorum* dio paso a la satisfacción de la mirada inquisidora por el mundo clásico del hombre renacentista en el campo de las matemáticas. Nació en Pisa hacia 1170 y falleció después de 1240. Este matemático italiano escribió el primero de sus grandes tratados, *Liber abaci* (*Libro de los ábacos*), en 1202, primera obra europea sobre matemáticas indias y arábigas. A causa de que su padre Guglielmo, mercader pisano, fue designado cónsul de la comunidad de mercaderes de esa ciudad italiana en el norte de África, con sede en el puerto argelino de Bugia (hoy Bejaia), Leonardo fue enviado a estudiar matemáticas con un maestro árabe. Después viajó por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza, donde estudió diferentes sistemas numéricos y métodos de cálculo, a la vez que se inició en el conocimiento esotérico de los números.

Cuando apareció su texto, los numerales indoarábigos eran solamente conocidos por poquísimos europeos que tenían acceso a traducciones

[5] *Ibidem*, p. 164.

de los escritos del matemático árabe del siglo IX: al-Khwarizmi. Aunque en su libro hablaba de las notaciones, el valor posicional de los guarismos, las operaciones matemáticas y sus aplicaciones al comercio (ganancias, conversión de pesas y medidas, intereses, cambios de moneda, etcétera), la mayor parte de su obra la dedicó a las matemáticas especulativas y de proporciones, representadas por las técnicas populares medievales de la Regla de Tres, la Regla de Cinco, la Regla de la Posición Falsa, la extracción de raíces y las propiedades de los números, para concluir con el álgebra y la geometría.

En 1220 produjo su breve obra *Practica geometriae* (*Práctica de geometría*), en la que incluyó ocho capítulos de teoremas basados en los *Elementos* de Euclídes y *Sobre las divisiones*. La *Practica*... fue rápidamente copiada e imitada y convirtió a Fibonacci en el favorito del sacro emperador romano Federico II. En 1225 dedicó su *Liber quadratorum* (*Libro de los números cuadráticos*) al emperador, el cual estaba totalmente dedicado a las ecuaciones de Diofanto de segundo grado, considerado su obra maestra.

Para los matemáticos modernos, Fibonacci es particularmente conocido por la serie de su nombre derivada de un problema planteado en su *Liber abaci*:

> Cierto hombre puso un par de conejos en un sitio totalmente rodeado de muros. ¿Cuántos pares de conejos pudo producir de ese par en un año, si se supone que cada mes un par tiene un nuevo par de conejos, el que es productivo a partir del segundo mes?

La secuencia numérica resultante: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, [...], en el que cada número es la suma de los dos precedentes, fue la primera secuencia numérica recursiva empleada en Europa. La fórmula de esta serie fue expresada por el matemático francés Albert Girard en 1634: $u_n + 2 = u_{n+1} + u_n$, en la que u representa a la cifra y el infraíndice su rango en la secuencia.

En 1753, el matemático Robert Simpson, de la Universidad de Glasgow en Escocia, notó que conforme los números crecían en magnitud, el cociente entre los números se aproximaba al número de oro (**Φ**), cuyo valor es 1.618075 [...] o $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Abajo se presentan los cocientes indicados y sus valores, observando que a partir del cociente 34/21, el resultado se aproxima a **Φ**:

$\frac{1}{1} = 1.000$ $\frac{2}{1} = 2.00$ $\frac{3}{2} = 1.500$ $\frac{5}{3} = 1.666$

$\frac{8}{5} = 1.600$ $\frac{13}{8} = 1.625$ $\frac{21}{13} = 1.615$ $\frac{34}{21} = 1.618$

$\frac{55}{34} = 1.618$ $\frac{89}{55} = 1.618$ $\frac{144}{89} = 1.618$ $\frac{233}{144} = 1.618$

$\frac{377}{233} = 1.618$ $\frac{610}{377} = 1.618$ $\frac{987}{610} = 1.618...$

Los inversos de los valores señalados también presentan la peculiaridad de aproximarse al valor del segmento mayor de una recta dividida en media y extrema razón a partir del cociente 21/34, como se podrá notar fácilmente a continuación:

$\frac{1}{1} = 1.000$ $\frac{1}{2} = 0.500$ $\frac{2}{3} = 0.666$ $\frac{3}{5} = 0.600$

$\frac{5}{8} = 0.625$ $\frac{8}{13} = 0.615$ $\frac{13}{21} = 0.619$ $\frac{21}{34} = 0.618$

$\frac{34}{55} = 0.618$ $\frac{55}{89} = 0.618$ $\frac{89}{144} = 0.618$ $\frac{144}{233} = 0.618$

$\frac{233}{377} = 0.618$ $\frac{377}{610} = 0.618$ $\frac{610}{987} = 0.618...$

Es posible construir gráficos con estos valores y encontrar las secciones doradas o áureas de tales valores en las construcciones geométricas.

El término Serie de Fibonacci fue acuñado por el matemático Edouard Lucas en el siglo XIX y los

Fig. 10. Retrato de Luca Pacioli acompañado de un discípulo, mismo que se cree haya sido el autorretrato del pintor de este óleo, Jacopo da Barbari.

científicos comenzaron a descubrir tales series en la naturaleza, por ejemplo: en las espirales de los centros de los girasoles, en las piñas de las coníferas, en la descendencia regular de los zánganos entre las abejas, en las conchas de los caracoles relacionados con los logaritmos (equiangulares), en el arreglo de los haces de hojas en un tallo y en los cuernos de los animales.[6]

El camino trazado por Fibonacci tuvo pronto muchos seguidores. Destaca, para el propósito de este trabajo, el fraile franciscano Luca Pacioli di Borgo Sancti Sepulcri o Paciuoli, quien nació en la pequeña población de ese nombre en Umbría, hacia 1445; se desconoce la fecha exacta de su fallecimiento, pero en cualquier caso fue posterior al 30 de agosto de 1514, fecha de su último testimonio escrito (fig. 10). Fue alumno de Piero della Francesca; progresó en matemáticas y otras ciencias lo suficiente como para convertirse en preceptor de la rica familia de un mercader veneciano. Durante su permanencia de seis o siete años en Venecia, se perfeccionó en matemáticas y aritmética comercial (actualmente los contadores lo consideran como uno de los fundadores de la contabilidad moderna); luego fue a Roma hacia 1470 o 1471, donde vivió algunos meses en casa de Leone Battista Alberti, a quien había sido recomendado por Piero della Francesca. En 1477 se hizo fraile menor, a partir de lo cual se convirtió en algo así como un maestro itinerante: Perugia, Zara, Florencia (donde entró en contacto con los grandes artistas del Renacimiento), Roma, Nápoles, Borgo Sancti Sepulcri en Urbino, Venecia, Milán (donde conoció y trabó amistad con Leonardo da Vinci). En 1509 publicó su volumen *Divina proportione*. Sin embargo, se ha considerado a la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá*, publicada en Venecia en 1494 en la imprenta de Paganino de Paganini, como su obra cumbre (fig. 11), en la cual ensalzó la importancia de las matemáticas en los campos de las ciencias y las ar-

Fig. 11. Grabado de una letra capitular del texto de la *Summa* en la edición de Paganino de Paganini de 1494, en la que se supone representado el fraile Pacioli.

[6] *Sir* Theodore Cook estudió múltiples casos tomados de la naturaleza en su libro *The Curves of Life*; *vid. infra*.

tes, la música, la cosmografía, la elaboración de mapas, el comercio y todas las llamadas artes mecánicas. Además de las enseñanzas de Piero della Francesca y Leone Battista Alberti, Pacioli señaló que lo influenciaron Gentile y Giovanni Bellini en Venecia; Alessandro Botticelli, Filippo y Domenico Ghirlandaio, Andrea del Verrocchio, Antonio del Pollauiolo, en Florencia; Pietro Perugino en Perugia, Andrea Mantenga, en Padua.

Divina proportione, aunque de menor importancia que la *Summa*, resultó de sumo interés para artistas e historiadores del arte. En ella se extendió sobre las concepciones místicas, pitagóricas y platónicas, que volvían a resurgir a la luz del Renacimiento. El libro fue dedicado a Ludovico *il Moro* o Ludovico Maria Sforza, duque de Milán, el mismo personaje a cuyo servicio se hallaba Leonardo da Vinci; lo concluyó el 14 de diciembre de 1498, y su manuscrito original se encuentra hoy en día en la Biblioteca Pública de Ginebra. Muchas de las ilustraciones de la obra fueron hechas por su amigo Leonardo.[7]

Recomendó a los artistas en su texto que fueran los cuerpos platónicos o poliedros pitagóricos (los cinco únicos poliedros regulares: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro; *vid. infra*) su modelo y objeto de meditación, así como que aprovecharan la infinita armonía de sus proporciones.

Leonardo da Vinci (1452-1519), por su parte, fue el célebre autor del esquema antropométrico vitruviano que engalanó las páginas de la *Divina proportione*, y quien llamó a la relación determinada por la segmentación de una recta en media y extrema razón como sección áurea o dorada y como número de oro a su expresión numérica (1.61803398875…). Su entusiasmo e interés por el tema fueron indudables, como lo manifiestan muchas de sus obras.

Al igual que Leonardo, Alberto Durero fue también influido por Pacioli. Nacido en Nuremberg el 21 de mayo de 1471 y muerto allí mismo el 6 de abril de 1528, Durero fue el más grande renacentista alemán. Realizó varios estudios de proporcionamiento del cuerpo humano basado en el método descrito por Alberti bajo el nombre de *exempeda*. Acaso siguiendo los consejos de Pacioli, algunas de sus obras muestran un acusado interés por los cuerpos platónicos, como lo evidencia su grabado *La melancolía*.

Con el advenimiento del Renacimiento, el énfasis homocentrista dio paso a la decadencia del concepto de hermandad iniciática de los gremios de constructores; así empezó su desintegración, la que de alguna forma también benefició a otros gremios no especializados en el trazo. La gran profusión de sellos entre los impresores, antes únicamente reservados como marcas masónicas en los sillares de las catedrales, dio fe de este fenómeno a partir del fin del siglo XV.

Las academias de arte comenzaron a surgir en el siglo XVII; dedicadas a la enseñanza de las bellas artes, acabaron con el secreto de los iniciados masónicos operativos. La *Accademia dei Lincei* romana o la *Accademia del Cimento* florentina dieron gran impulso a la divulgación de tales conocimientos. La *Accademia del Disegno*, fundada por Giorgio Vassari y otros notables artistas en Florencia, estaba más abocada al campo de las ciencias, en particular de las matemáticas. Las academias de bellas artes de San Fernando en Madrid, San Carlos en Valencia y San Carlos en México no son sino resabios dieciochescos de aquellas otras.

Sin embargo, fue el racionalismo de finales del siglo XVIII, el llamado Siglo de las Luces, lo que puso punto final al desarrollo de los conocimientos

[7] Existe edición en español: Luca Pacioli, *La divina proporción*, 2a. ed. (trad. Ricardo Resta, pról. Aldo Mieli), Buenos Aires, Losada, 1959.

y las técnicas que se habían integrado a la disciplina del trazo por milenios. A la par que el método deductivo racional de la *Enciclopedia*, surgieron el sistema métrico decimal, la geometría descriptiva de Gaspard Monge, la estereotomía de Frézier y la enseñanza de las artes plásticas en escuelas abiertas libremente al público. La obra de Monge sobresalió, ya que logró que la geometría descriptiva, heredera parcial de la ciencia del trazo, permitiera el auge inmediato en las ciencias del diseño aplicado. El desarrollo y la fabricación de las máquinas que permitieron la Revolución Industrial fueron posibles, en gran parte, gracias a las propuestas de Monge. Pero, por otro lado, se abandonó totalmente la filosofía del número y el viejo anhelo humano de integrar sus obras al orden cósmico.

Para finales del siglo XIX y principios del XX, los tratadistas de arquitectura llegaron al ataque denodado hacia los viejos postulados anclados en diferentes culturas desde el amanecer de los tiempos. Sus deturpaciones señalaban que los trazos armónicos eran meras coincidencias fortuitas o vulgares recetas cabalísticas que nada tenían que ver con la ciencia y que las propiedades de los números eran sólo quimeras o supersticiones, usando las palabras de Julien Guadet.

Estas posturas fueron rápidamente adoptadas por las escuelas de arte: quien osara invocar la filosofía de los números o los méritos de la sección áurea, estaba destinado a sufrir los ataques de sus colegas. Los trazos reguladores de proporción fueron vistos no sólo con desprecio, sino que se marginaron de los planes de estudio.

Sin embargo, el movimiento romántico de finales del XVIII y principios del XIX permitiría el surgimiento de ciencias como la arqueología, la paleontología y la restauración, las que a su vez favorecieron el interés por el mundo antiguo y sus manifestaciones plásticas. Entre los pioneros de las investigaciones arquitectónicas —y por ende, plásticas— se cuentan a John Ruskin y Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc, quienes revaloraron los conocimientos de los desaparecidos gremios y permitieron el estudio de sus "antiguallas".

El alemán Zeysing redescubrió la sección áurea hacia 1850. En su *Aestetische Forschungen*, publicado en 1855, proclamaba: "Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que entre la mayor y el todo"; llamaba a esta relación la ley de las proporciones (*Proportional Gesetz*) y declaraba que se cumplía en las proporciones del cuerpo humano, en las especies animales que se distinguen por la elegancia de sus formas, en ciertos templos griegos (particularmente el Partenón), en la botánica y hasta en la música.[8]

Sin embargo, los estudios más serios y metodológicamente realizados se hicieron hasta principios del pasado siglo XX. Entre los más destacados investigadores en el campo se pueden citar a:

- Jay Hambidge, estadounidense autor de *Dynamic Simmetry*, quien en su estudio de vasos griegos propuso sus series armónicas de los llamados rectángulos estáticos y dinámicos, considerando tanto a la sección áurea, como otros cánones de proporción armónica.[9] Aplicó su sistema al Partenón únicamente, en el caso de la arquitectura. Mediante el análisis de multitud de citas de los antiguos pitagóricos, señaló que cuando aquéllos hablaban de relación, siempre estaban pensando en un rectángulo. Estableció

[8] Matila C. Ghyka, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes* (trad. J. Bosch Bousquet), Buenos Aires, Poseidón, 1966, p. 34.
[9] *Ibidem*, pp. 145-149; Matila C. Ghyka, *El número de oro. Ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental* (trad. J. Bosch Bousquet), Buenos Aires, Poseidón, 1968, pp. 81-91.

una ley, según la cual, no se mezclan los temas armónicos en una misma obra.

- F. Macody Lund, arqueólogo noruego encargado por el gobierno de su país para opinar sobre la restauración de la catedral gótica de San Olaf en Nidaros (hoy Trondhjem),[10] descubrió en sus estudios de las plantas y los alzados de las catedrales góticas sus sistemas *Ad quadratum* y *Ad pentagonum*, en los que esbozó que su simetría radial surgía de un sistema pentagonal central.
- Ernst Moessel, arquitecto alemán, quien a partir de sus estudios comparativos entre multitud de monumentos de la antigüedad y del medievo,[11] definió su sistema de análisis armónico a partir de lo que denominó la segmentación polar del círculo; en este sistema aplicó el análisis dividiendo al círculo en cuatro, ocho y dieciséis partes iguales, o bien en cinco, diez y veinte segmentos también iguales. Su método lo determinó partiendo del análisis de muchas citas sobre el círculo hechas en la antigüedad.
- Charles Funck Hellet es el autor que quizá más aplicaciones haya hecho de los sistemas de proporción armónica en la arquitectura. Descubrió la forma como obtener las escuadras para constructores χ_1 y χ_2, a partir del pentágono invertido de Hipócrates de Chíos; en su aplicación encontró una serie de nuevas relaciones geométricas en el teorema de Pitágoras íntimamente vinculadas con la sección dorada.
- Georges Jouven, francés, quien aprovechó sus años de prisión durante la Segunda Guerra Mundial para estudiar estos temas con la ayuda de su ilustrado carcelero. Encontró 180 diferentes trazos armónicos posibles en 3 500 monumentos arquitectónicos analizados. Este autor nos legó las pautas a seguir al momento de hacer un análisis armónico: definir previamente la metrología del caso de estudio, marcar los ejes y niveles principales de trazo, determinar el tema compositivo, para que "a partir de ese momento, cada quien [siga] lo que su sentido crítico y su intuición le inspiren".
- Matila C. Ghyka, auténtico esteta de las matemáticas, a quien debemos el redescubrimiento moderno de los cánones reguladores de proporción en las artes en general; lo mismo incursionó en las artes plásticas que en la música a partir de sus análisis matemáticos y geométricos, dejando sus valiosos conocimientos en *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes* y *El número de oro*.

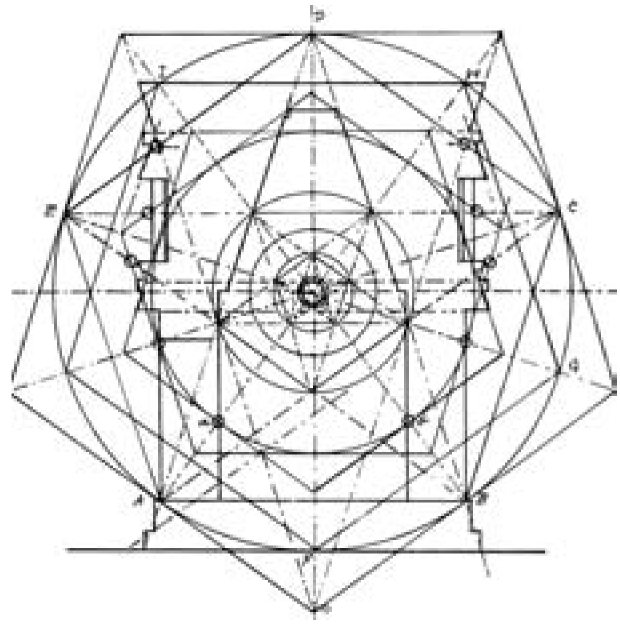


Fig. 12. Sección transversal de la denominada Casa de las Tortugas, en Uxmal, con los trazos reguladores propuestos por Amábilis.

En nuestro país, los arquitectos Manuel Amábilis (con la arquitectura maya de Chichén Itzá y Uxmal, fig. 12),[12] José Villagrán García (con la cate-

[10] Matila Ghyka, *Estética*..., *op. cit.*, p. 191.
[11] Matila Ghyka, *El número de oro*..., *op. cit.*, p. 95.
[12] *Vid.* Manuel Amábilis Domínguez, *La arquitectura precolombina en México*, México, Orión, 1956.

dral y el sagrario metropolitanos de México), Ricardo de Robina (con la catedral de Mérida), Carlos Chanfón (con algunas esculturas prehispánicas) y los historiadores Justino Fernández (con pinturas coloniales) y Beatriz de la Fuente, han hecho uso de estos sistemas de proporcionamiento armónico en el análisis de algunos monumentos importantes. Además, un sinnúmero de artistas plásticos los emplean en el diseño de muy variadas obras.

El concepto matemático y el trazo geométrico de la sección dorada

Platón señalaba en sus *Diálogos*, en particular en el denominado "Timeo o de la Naturaleza", lo siguiente:

> [...] Cuando Dios se propuso poner orden en el universo, mostraban ya el fuego, la tierra, el aire y el agua trazas de su propia naturaleza; pero, no obstante estaban en el estado en que deben encontrarse las cosas de las que Dios está ausente; empezó Él por distinguirlas por medio de formas y números. Sacólas después de la agitación y confusa mezcla en que estaban y les dio la mayor belleza y la mayor perfección posibles: no perdamos nunca de vista este principio. Ahora me es preciso exponeros la formación y disposición de los cuerpos elementales en un lenguaje que no es usual; pero que no siéndoos extraños los métodos y procedimientos que me veré obligado a emplear en mis demostraciones, las seguiréis sin dificultad.
>
> Empezaré por deciros que para todo el mundo es evidente que el fuego, la tierra, el agua y el aire son cuerpos. Todo lo que tiene la esencia del cuerpo tiene también la profundidad. Todo lo que tiene la profundidad contiene en sí necesariamente la naturaleza de la superficie. Una base cuya superficie es perfectamente plana se compone de triángulos. Todos los triángulos toman su origen de dos triángulos que tiene cada uno un ángulo recto y los otros dos agudos.[13] Uno de estos triángulos tiene en cada lado una parte igual de un ángulo recto formado por dos iguales;[14] el otro, dos partes desiguales de un ángulo recto formado por lados desiguales.[15] Este es el origen que atribuimos al fuego y a los otros tres cuerpos, obedeciendo a la necesidad, tal como nos la muestra la verosimilitud. En cuanto a los principios superiores que son los de los triángulos, sólo Dios los conoce y un reducido número de hombres a quiénes ama.[16]
>
> Tenemos que exponer cómo nacieron estos cuatro hermosos cuerpos, cómo se diferencian entre sí y a cuáles, disolviéndose, pueden engendrarse recíprocamente. Procediendo así, conoceremos la verdadera formación de la tierra y del fuego, así como la de los dos cuerpos que los sirven de términos medios,[17] y entonces no concederemos a nadie que pueda haber nunca cuerpos tan bellos como aquéllos, de los que cada uno pertenece a un género aparte. Es, pues, necesario que ponga todo mi empeño en constituir armónicamente estos cuatro géneros de cuerpos de excelsa belleza, a fin de que veáis lo bien que he comprendido su naturaleza.[18]

Más adelante, refiere las propiedades de estos cuerpos elementales:

> [...] En cuanto a sus afinidades, movimientos y otras propiedades, los reglamentó y ordenó Dios con una exactitud perfecta y poniendo en todo la proporción y la armonía por todos los medios a los cuales se prestó la necesidad dejándose persuadir por la inteligencia.[19]

[13] Estos dos triángulos irreductibles, principios de todos los otros, son dos triángulos rectángulos.
[14] Es el triángulo rectángulo isósceles.
[15] Es el triángulo rectángulo escaleno.
[16] Los triángulos isósceles y escaleno son los principios geométricos de los cuatro cuerpos elementales; pero por encima de estos principios geométricos están los principios numéricos, los números, conocidos solamente por Dios y los pitagóricos.
[17] Es decir, el agua y el aire. No hay que olvidar lo que Platón dijo al principio, que dos cuerpos sólidos no pueden unirse más que por dos términos medios.
[18] Platón, *Diálogos*, 23a. ed., México, Porrúa, 1993, p. 689.
[19] *Ibidem*, p. 692.

Por otra parte, en el *Diálogo* denominado "Filebo", nos dio una precisa definición de la belleza en su orden de ideas:

> No entiendo por belleza de forma una belleza como la de los animales o pinturas; esto es lo que la mayoría creerá que yo quiero decir. Entiendan, sin embargo, que me refiero a las rectas y las circunferencias y las figuras planas y sólidas que se forman al girar tornos y reglas y medidas de ángulos. Éstas, yo lo afirmo, no son hermosas relativamente como otras cosas, sino que son eterna y absolutamente hermosas.

La belleza de formas en los productos culturales, es decir, en los hechos por el hombre, es el ideal de belleza que los antiguos filósofos y matemáticos griegos postulaban como verdaderamente válida. Recordemos una hermosa definición de belleza del mundo antiguo grecolatino: *Pulchrum est quod visum placet*.[20] Ahora es ya posible entender los conceptos vinculados a la estética antigua.

La armonía es el estado de orden, acuerdo o integración en las relaciones de elementos de un todo, o de las partes entre sí, y con el todo. Asimismo se refiere al estudio de las relaciones, combinaciones, progresiones, soluciones o modulaciones de los elementos que conforman el todo. Esta armonía la podemos encontrar en el ritmo adecuado, que no es sino la grata y armoniosa sucesión de elementos dentro de un orden acompasado; es la proporción guardada entre la magnitud de un elemento y la de otro diferente. El concepto de ritmo se vincula necesariamente con el de serie, que se refiere al conjunto de cosas relacionadas entre sí y que se suceden unas a otras, o bien, la sucesión de elementos que se derivan unos de otros, según una ley determinada, como se observa en la serie de Fibonacci.

[20] "Bello es lo que visto, place."

De todas estas definiciones, partieron las búsquedas de la belleza en las formas de origen humano, a partir de las formas geométricas y los números. "El número crea orden, el orden ritmo, el ritmo engendra armonía",[21] como lo ha señalado Pablo Tosto. Así pues, el hombre creador relaciona los tamaños y las proporciones de los objetos que genera, sopesa su simetría o su asimetría, pondera sus dimensiones y las proporciona adecuadamente. La proporción es la relación de dos medidas diferentes.

El *principio de mínima acción* (*principio de acción estacionaria* para Einstein) es entendido en el mundo orgánico como el principio de economía de sustancia: "Los cambios que afectan a un sistema biológico son tales que tienden a reducir al mínimo la perturbación de origen exterior." Matemáticamente, la ley de economía de sustancia y el principio de mínima acción pueden expresarse en una proporción de dos términos, esto es, la proporción en media y extrema razón que conlleva al principio de armonía: para combinar dos cosas es preciso que exista entre ellas una tercera que sirve de vínculo de unión. Ya Platón afirmaba al respecto los siguientes conceptos:

> Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera: es preciso que haya entre ellas un lazo que las una, y ninguno mejor que el que, con él mismo y con las cosas que une, hace un solo y mismo todo. Y la naturaleza de la proporción es tal, que logra perfectamente este objetivo, porque cuando de tres números, o de tres masas o de tres fuerzas cualesquiera, el primero es al de en medio, lo que éste es al último y cuando, por otra parte, lo que el último es al medio, es éste al primero —el medio convirtiéndose en el primero y en el último, y el primero y el último en medios—, todo permanece necesariamente como era, y como las partes están

[21] Pablo Tosto, *La composición áurea en las artes plásticas*, 2a. ed., Buenos Aires, Hachette, 1969, p. 12.

entre sí en relaciones semejantes, constituyen como antes un solo uno [...][22]

La aplicación de estos principios, que expresan una ley del cosmos, la trataron de hallar los matemáticos y geómetras de la antigüedad en el ejemplo más sencillo: la línea recta. De hecho para los pitagóricos del siglo VI a.C., los números eran la clave de las leyes armónicas del cosmos, y, por lo tanto, símbolos de un orden cósmico divino.[23] "El segmento rectilíneo determinado por dos puntos es en geometría, en mecánica y en arquitectura," como bien señala Matila Ghyka, "el elemento más sencillo al que se pueden aplicar las ideas de medida, comparación y relación. La operación más fácil a que conducen estos conceptos es la elección de un tercer punto cualquiera, pasando de la unidad a la dualidad para llegar a enfrentarse con la proporción".[24] Pero ante la posibilidad de partición de un segmento rectilíneo tenemos tres opciones o alternativas, como bien apuntaba Pablo Tosto:[25]

1. Cortarla por la mitad, en dos partes iguales, obteniendo así una simetría simple, monótona, de relación constante, de ritmo estático, de efecto similar al de los números naturales.
2. Seccionarla en cualquier parte, produciendo una asimetría irrazonable, sin armonía, ni ritmo, ni lógica, consiguiendo un efecto de equilibrio inestable y de fatiga óptica.
3. Dividirla en la única forma asimétrica posible en que los dos segmentos resultantes guarden entre sí una relación constante y proporcional, similar a la serie aditiva de Fibonacci, concatenados a un ritmo recíproco y continuo, de armonía segura y equilibrada, de proporción áurea.

Esta última posibilidad es la que Euclides enunciaba como división de una recta en media y extrema razón. Enunciarla es sencillo: cortar una línea en dos partes desiguales, de manera que toda la línea sea al segmento mayor, como el mayor lo es al menor. Dicho de otra forma: dividir una longitud determinada en dos partes desiguales, de tal modo que la razón entre la menor y la mayor sea igual a la razón entre ésta última y la suma de las dos (la longitud inicial).[26]

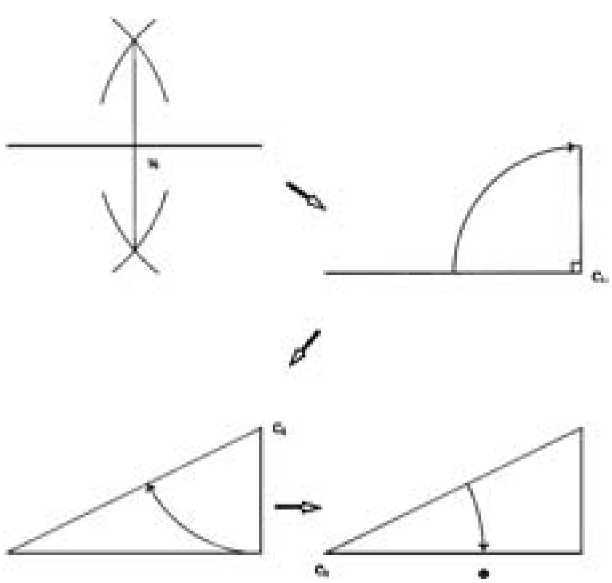
De esta forma se obtiene lo que Luca Pacioli llamó la *divina proportione*, Kepler la "sección divina" (fue el primero que la encontró útil en la botánica y para el cual era una "joya preciosa"), y Leonardo da Vinci la denominó "sección dorada" o áurea (*golden section* o *golden mean* en inglés; *goldener Schnitt* en alemán; *section dorée* en francés) y quien también llamó "número de oro" a la expresión numérica de tal relación de proporciones, el cual es una cifra periódica y equivale a 1.61803398875... Con el fin de manejarlo con comodidad, los matemáticos ingleses Mark Barr y Schooling optaron por identificarlo con un signo propio, la letra griega Φ mayúscula, como lo apuntan en los anexos matemáticos que elaboraron para el libro de *Sir* Theodore Cook, *The Curves of Life* (*Las curvas de la vida*).

La determinación geométrica de tal partición de una recta en media y extrema razón se refiere a continuación:

[22] Platón, *op. cit.*, pp. 672-673.
[23] Hans Biedermann, *op. cit.*, p. 326.
[24] Matila Ghyka, *Estética*..., *op. cit.*, p. 22.
[25] Pablo Tosto, *op. cit.*, p. 17.
[26] Matila Ghyka, *Estética*..., *op. cit.*, p. 25.

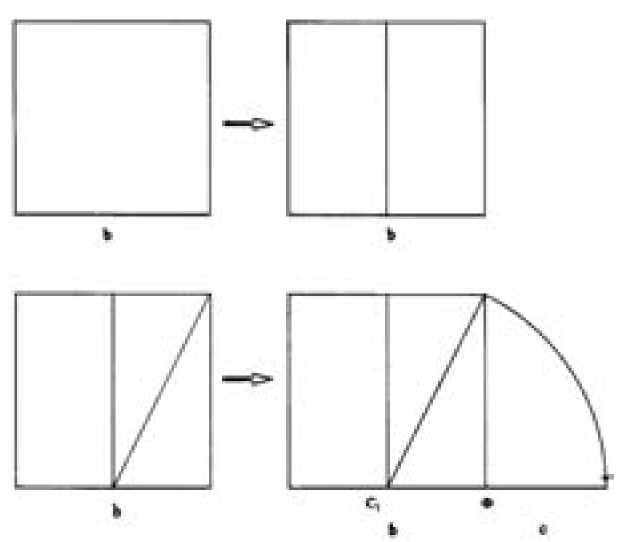
División de un segmento de recta en media y extrema razón

1. Dada una recta cualquiera, encontrar la mitad exacta del segmento.
2. Levantar una perpendicular a la misma por uno de sus extremos.
3. Haciendo centro en el extremo elegido, trazar un arco con el compás con radio igual a la mitad del segmento, hasta cruzar la perpendicular. Esto es, llevar la mitad del segmento sobre la perpendicular.
4. Construir un triángulo rectángulo desde el extremo opuesto del segmento, hasta el punto extremo de la perpendicular. En este triángulo rectángulo, el segmento original es el cateto mayor, la perpendicular en su extremo el cateto menor y la hipotenusa la línea que une los extremos de los dos anteriores.
5. Con la ayuda del compás y haciendo centro en el extremo de la perpendicular, llevar la medida del cateto menor sobre la hipotenusa. Esto es, llevar la mitad del segmento original sobre la hipotenusa, a partir del extremo de la perpendicular o cateto menor.
6. Finalmente, haciendo centro en el extremo opuesto a la perpendicular del segmento original o cateto mayor, llevar la diferencia resultante en la hipotenusa hasta el segmento original.
7. La división hallada sobre el segmento original marca el punto en el que la recta ha quedado dividida en media y extrema razón.



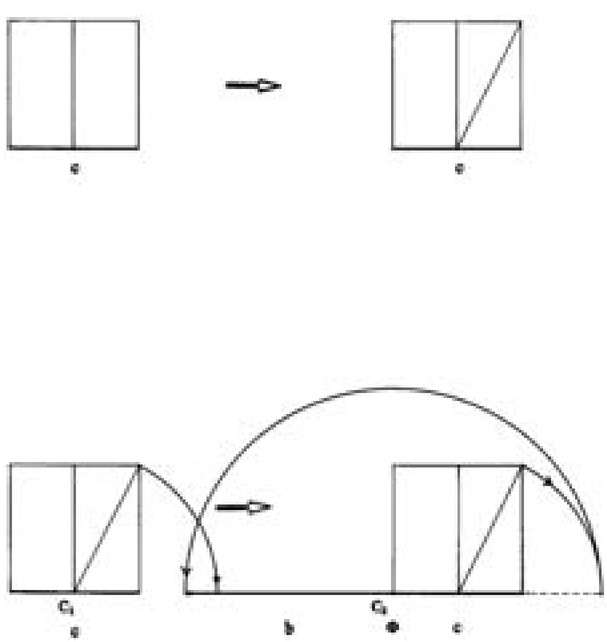
División de una recta en media y extrema razón: determinación del segmento menor dado el mayor

1. Construir un cuadrado exacto tomando como base el segmento mayor dado.
2. Dividir ese cuadrado en dos rectángulos verticales iguales, dividiendo el segmento en el punto medio.
3. Trazar la diagonal del segundo rectángulo, a partir del punto medio del segmento dado.
4. Haciendo centro en el punto medio del segmento, llevar con el compás la medida de la diagonal, hasta cortar la prolongación del segmento mayor dado.
5. El punto de intersección sobre la prolongación de la recta determina el segmento menor de la recta dividida en media y extrema razón.



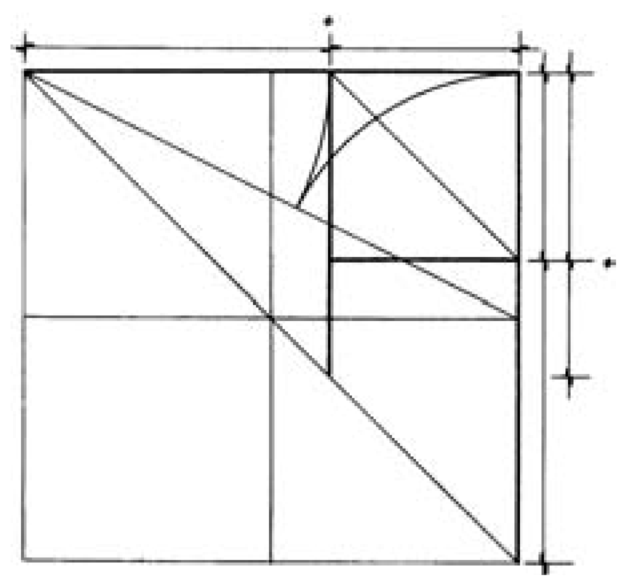
División de una recta en media y extrema razón: determinación del segmento mayor dado el menor

1. Construir un cuadrado exacto tomando como base el segmento menor dado.
2. Dividir ese cuadrado en dos rectángulos verticales iguales, dividiendo el segmento en el punto medio.
3. Trazar la diagonal del segundo rectángulo, a partir del punto medio del segmento dado.
4. Haciendo centro en el punto medio del segmento, llevar con el compás la medida de la diagonal, hasta cortar la prolongación del segmento menor dado.
5. Haciendo centro en el extremo opuesto del segmento menor dado, regresar el total del segmento determinado por el procedimiento anterior, hasta cortar la prolongación del segmento dado hacia este extremo.
6. El nuevo segmento dispuesto al extremo opuesto de todo el movimiento anterior es el segmento mayor buscado de la recta dividida en media y extrema razón.



Trazo del compás áureo de tres puntas[27]

1. Construir un cuadrado perfecto con base en el segmento dado que se desea como lado del compás.
2. Dividir el cuadrado en cuatro partes iguales con rectas perpendiculares entre sí.
3. Hallar la media y extrema razón de cualquiera de los lados del cuadrado mayor.
4. A partir del segmento así dividido, trazar las diagonales a 45° tanto del cuadrado mayor, como del segmento a partir del punto en media y extrema razón.
5. Por el punto anteriormente señalado, levantar una perpendicular hasta su intersección con la diagonal del cuadrado.
6. Por el extremo de la diagonal a 45°, levantada desde el punto en media y extrema razón, construir una paralela al segmento original, hasta intersecarla con la perpendicular levantada sobre el punto en media y extrema razón.

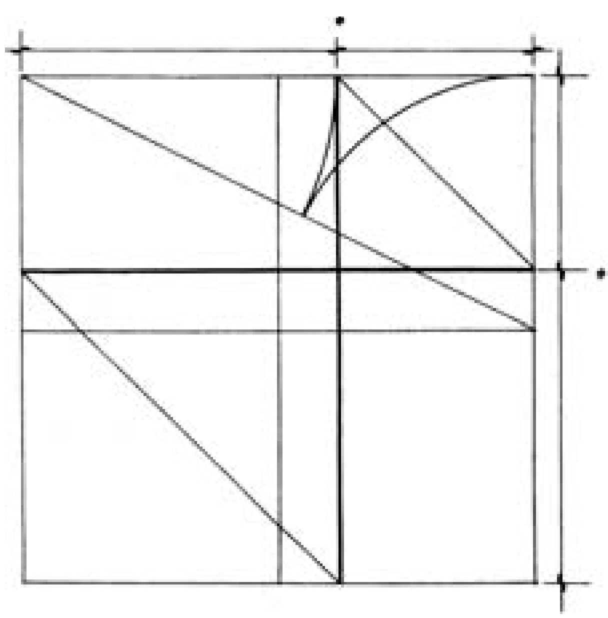


[27] Los compases áureos son instrumentos útiles para determinar la existencia de proporciones áureas en el análisis de las obras.

7. Resaltar los lados del compás áureo así construido. Estos trazos son la base en la construcción de un compás de tres puntas de este género.

Trazo del compás áureo de cuatro puntas

1. Construir un cuadrado perfecto con base en el segmento dado que se desea como lado del compás.
2. Dividir el cuadrado en cuatro partes iguales con rectas perpendiculares entre sí.
3. Hallar la media y extrema razón de cualquiera de los lados del cuadrado mayor.
4. Por el punto en media y extrema razón tirar una diagonal a 45° hasta el lado adyacente.
5. Por el punto anteriormente señalado, levantar una perpendicular hasta su intersección el extremo opuesto.
6. Hacer lo mismo con el punto en media y extrema razón llevado al lado adyacente.
7. Resaltar los lados del compás áureo así construido. Estos trazos son la base en la construcción de un compás de cuatro puntas de este género.



Determinación algebraica de los valores de la sección áurea

Haciendo uso del esquema de la determinación geométrica de la división de un segmento en media y extrema razón, se pueden determinar los valores numéricos y algebraicos de los segmentos mayor y menor de la sección dorada o áurea. El procedimiento se describe a continuación.

El problema se puede sintetizar de la siguiente manera: si se determina el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por el trazo geométrico en función de a, valor del segmento total original, sabremos el valor del segmento mayor más la mitad del segmento total original, de donde obtendremos fácilmente el valor del segmento mayor y también del menor.

1o. Valiéndose del teorema de Pitágoras, podemos calcular el valor de la hipotenusa del triángulo formado.

$$h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Despejando el valor de la hipotenusa:

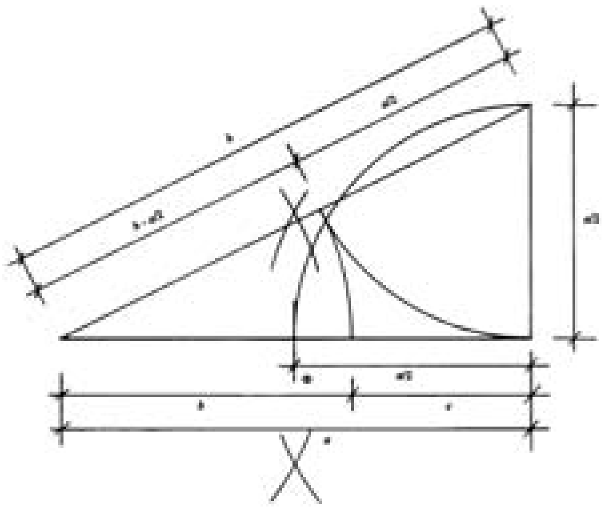
$$h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Reduciendo el segundo miembro de la ecuación:

$$h = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$



Reduciendo el segundo miembro de la ecuación:

$$c = a - a\,(\frac{\sqrt{5} - 1}{2})$$

$$c = a\,[1 - (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})]$$

$$c = a\,[1 + \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}]$$

$$c = a\,(1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$$

$$c = a\,(\frac{2 + 1 - \sqrt{5}}{2})$$

De donde el valor de c es:

$$\therefore\ c = a\,(\frac{3 - \sqrt{5}}{2})$$

De donde el valor de la hipotenusa, extrayendo los valores posibles del radical sería:

$$\therefore\ h = \frac{a}{5}\sqrt{5}$$

2o. Cálculo del segmento mayor (b) a partir del valor de la hipotenusa. Si observamos la hipotenusa, veremos que está constituida por el valor del cateto menor ($a/2$) más el valor de b, de donde:

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$$

De donde el valor del segmento mayor b es:

$$\therefore\ b = a\,(\frac{\sqrt{5} - 1}{2})$$

3o. Cálculo del segmento menor (c) de la recta original. Restando el valor del segmento mayor (b) al valor de la recta original, tendremos:

$$c = a - [a\,(\frac{\sqrt{5} - 1}{2})]$$

Cálculo numérico de los segmentos resultantes de la división de una recta en media y extrema razón

1o. Cálculo del valor del segmento mayor (b):

$$b = a\,\frac{(2.2360679\ldots - 1)}{2}$$

$$b = a\,\frac{(1.2360679\ldots)}{2}$$

$$\therefore\ b = 0.61803395\ldots a$$

$$\rightarrow b \approx 0.618\ldots a$$

2o. Cálculo del valor del segmento menor (c):

$$c = a\,\frac{(3 - 2.2360679\ldots)}{2}$$

$$c = a\,\frac{(0.7639321\ldots)}{2}$$

$$\therefore\ c = 0.38196605\ldots a$$

$$\rightarrow c \approx 0.382\ldots a$$

3o. Si el valor del segmento total (*a*) fuera la unidad, entonces:

$$
\begin{array}{lll}
Si & a & = 1 \\
\rightarrow & b & = 0.618 \\
y & c & = 0.382 \\
\sum & & = 1.000
\end{array}
$$

El pentágono y los poliedros pitagóricos

Entre las figuras geométricas asociadas con la sección dorada sobresale el pentágono. Es, al decir de Pablo Tosto, la más extraordinaria de todas,

> [...] ya que casi todas las relaciones naturales de su forma, medidas y trazas, están en **Φ** [...] ya solo, con el círculo que lo inscribe o circunscribe, o bien dentro del cuadrado o del rectángulo [...] Todas las figuras que surgen de la subdivisión del pentágono tienen sus mismas propiedades nobles. Lo más sorprendente son sus diagonales que se cruzan [...] dando lugar a una estrella de cinco puntas o pentalfa, verdaderamente áurea, que puede ser aplicada con provecho en la composición plástica. Todas las figuras mayores y menores, consecuencia de las trazas del pentágono, tienen sus medidas y su superficie en proporciones áureas recíprocas.[28]

Los antiguos conocían bien las propiedades del pentágono, tanto que los pitagóricos le confirieron el puesto de honor entre las figuras planas. Luca Pacioli lo exalta con gran fervor; bajo su influencia, Giaccomo Vignola trazó una planta francamente pentagonal para el soberbio palacio de Caprarola.

Correspondió al pentágono estrellado o pentagrama tener el máximo valor simbólico para los discípulos de Pitágoras. Ellos y los neopitagóricos lo bautizaron con el nombre de pentalfa (cinco alfas cruzadas),

> [...] como emblema de la salud y de la vida [...] de tal modo que las letras situadas en los vértices componían la palabra υγιηα, que más adelante los gnósticos sustituyeron por Ιησζ. Como estrella de cinco puntas, el mismo símbolo sirvió en la Edad Media de sello a la Santa Vehme; Paracelso en el siglo XVI y el padre Kircher en el XVII, lo mencionan también. Además, el sabio jesuita narra a este propósito en el capítulo *De Magicis Amuletis* de su *Aritmología*, que en vísperas de una batalla contra los gálatas, Antíoco vio en sueños a Alejandro mostrándole la estrella de cinco puntas y que sus magos le aconsejaron enarbolar este emblema como estandarte durante el combate.[29]

Fig. 13. Rosetón de la catedral de Amiens del siglo XIII con el pentagrama.

Ghyka recuerda también que una variante del pentagrama o pentalfa original podía encontrarse estampada en la parte inferior de las actas ma-

[28] PabloTosto, *op. cit.*, p. 35.

[29] Matila Ghyka, *Estética...*, *op. cit*. pp. 70-71.

sónicas de una logia del rito egipcio hacia 1860,[30] cuyo último avatar es la estrella roja de los soviets.

El pentágono ha sido una figura a menudo empleada en el trazo de los rosetones góticos, como por ejemplo en algunas portadas de *Notre Dame* de París (fig. 13). Macody Lund descubrió un pentagrama completo esculpido en una iglesia bizantina del siglo VI en Spalato, el que también se halla en *Notre Dame*.[31]

En el campo simbólico, la figura pentagonal resulta interesante. Puede presentarse bajo dos formas: pentagonal o decagonal (decágono estrellado). Su simbología es múltiple pero se funda, sobre todo, en el número cinco que expresa la unión de desiguales. Los cinco brazos del pentagrama funden en una sola imagen fecunda el 3, que significa el principio masculino, y el 2, que representa al femenino; simboliza entonces el androginato. Sirvió de reconocimiento a los miembros de los cenáculos pitagóricos; para estos iniciados era la clave de la Alta Ciencia, pues les abría el camino al secreto. Los pitagóricos trazaban este símbolo sobre sus cartas; a manera de saludo equivalía al latino *vale*. El pentagrama se llamaba también Hygieia, que es el nombre griego de la diosa de la salud, llamada Higía por los romanos; las letras que componen su nombre se colocaban en cada una de las puntas de la estrella; también se le solía llamar *signum pythagoricum* (signo pitagórico) o *signum hygeae* (signo de Higía).[32] Según Paracelso, el pentagrama es uno de los signos más poderosos, representaba la idea de perfección y expresaba la potencia que era fruto de la síntesis de fuerzas complementarias.

El *pentagrammon* pitagórico fue, además de símbolo de conocimiento, medio de conjuro y de adquisición de poderío. Los magos utilizaban

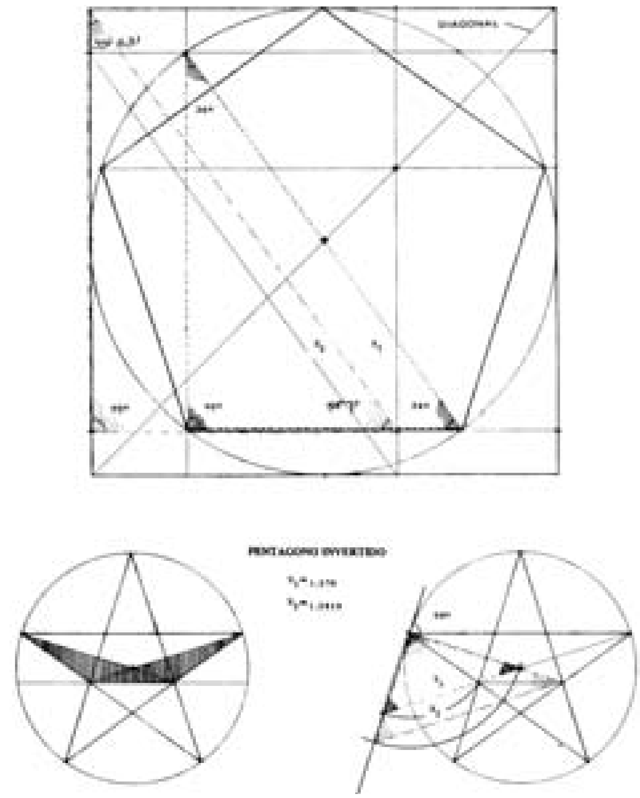


Fig. 14. Pentágono de ángulos invertidos de Hipócrates de Chíos, a partir del cual se pueden obtener las escuadras para constructores por dos métodos.

sus figuras para ejercer su poder; los había para el amor, para la mala suerte, etcétera.

Al pentagrama estrellado, no pentagonal sino decagonal, se llamó en la tradición masónica la "estrella flameante o flamígera", la que algunos identificaban como la imagen del hijo de Isis y del Sol, autor de las estaciones y emblema del movimiento, entre los egipcios; también de Horus, símbolo de la materia prima, fuente inagotable de vida, de esta chispa del fuego sagrado, simiente universal de todos los seres.[33]

A partir del pentágono, los antiguos constructores griegos encontraron la manera de obtener sus escuadras para el trazo de valores estéticos singulares, las llamadas escuadras de Hipócrates

[30] Gran Oriente de Egipto, logia de los sabios de Heliópolis.
[31] *Ibidem*, p. 73.
[32] Hans Biedermann, *op. cit.*, pp. 362-364.

[33] Jean Chevalier y Alain Gheerbrant, *Diccionario de los símbolos*, 3a. ed., Barcelona, Herder, 1991.

de Chíos: χ_1 y χ_2. Por algunos filósofos griegos, particularmente Proclo (*ca.* 450 d.C.) y Simplicio (*ca.* 530 d.C.), se sabe que Hipócrates de Chíos fue un comerciante griego avecindado en Atenas, admitido como miembro de la secta de los pitagóricos y de quienes aprendió la ciencia de la geometría. Su mérito estribó en ser el primer compilador de los elementos geométricos casi un siglo antes que Euclides; si bien su tratado no existe ya, es posible que Euclides lo tomara como modelo para sus *Elementos*. En sus esfuerzos por cuadrar el círculo, Hipócrates pudo hallar las áreas de ciertas lunas o secciones circulares; basó su aproximación en el teorema de que las áreas de dos círculos tienen la misma proporción que los cuadrados de sus radios. También se le ha atribuido el descubrimiento de que un cubo puede ser duplicado si pueden determinarse dos medios proporcionales entre un número y su doble. El arqueólogo noruego Macody Lund aprovechó ciertas referencias atribuidas a Hipócrates para evocar su pentágono invertido o de ángulos invertidos,[34] a partir de los cuales se podían obtener las escuadras χ_1 y χ_2 (fig. 14).

Los poliedros regulares corresponden a los polígonos regulares convexos, sólo que en tres dimensiones. Tienen polígonos regulares idénticos (para el mismo poliedro) como caras, que convergen en vértices idénticos (ángulos sólidos superponibles), unidos por aristas de igual longitud. Cada uno de ellos es inscriptible en una esfera, pero su número (a diferencia de los polígonos regulares que son infinitos), está limitado a cinco y sus elementos constan en el cuadro siguiente:

Nombre del poliedro	**Número de vértices**	**Número de lados (aristas)**	**Número de caras (con sus características)**
Tetraedro	4	6 (3 por vértice)	4 triángulos equiláteros
Octaedro	6	12 (4 por vértice)	8 triángulos equiláteros
Hexaedro o cubo	8	12 (3 por vértice)	6 cuadrados
Dodecaedro	12	30 (5 por vértice)	12 pentágonos
Icosaedro	20	30 (3 por vértice)	20 triángulos equiláteros

Los cinco poliedros regulares se llaman poliedros pitagóricos o cuerpos platónicos por su importancia en la teoría molecular y en la cosmografía de Platón. Los cinco tienen íntimas relaciones estructurales entre sí; de hecho, se pueden inscribir unos dentro de otros (fig. 15). Hay una gran riqueza de relaciones áureas entre ellos, sobre todo en los dos últimos: dodecaedro e icosaedro. Platón les asignó su correspondencia con los elementos básicos a cada uno de los cuerpos, en su concepción del mundo:

Tetraedro	Fuego
Octaedro	Aire
Hexaedro o cubo	Tierra
Dodecaedro	Orden total del universo (cosmos)
Icosaedro	Agua

34 *Cfr.* Macody Lund, *Ad quadratum. Étude des bases géométriques de l'architecture religieuse dans l'Antiquité et au Moyen Age, découvertes dans la Cathédrale de Nidaros*, París, Albert Morangé, 1922, pp. 30-33.

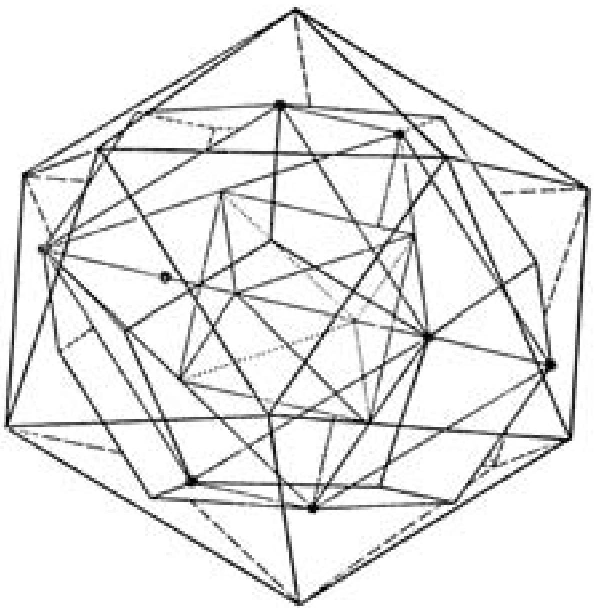


Fig. 15. Los cuerpos platónicos o poliedros pitagóricos inscritos uno dentro de otro.

En "Timeo o de la naturaleza", Platón particularizó la importancia especial del dodecaedro: "Quedaba una quinta combinación [el dodecaedro], de la que Dios se sirvió para trazar el plano del universo."[35]

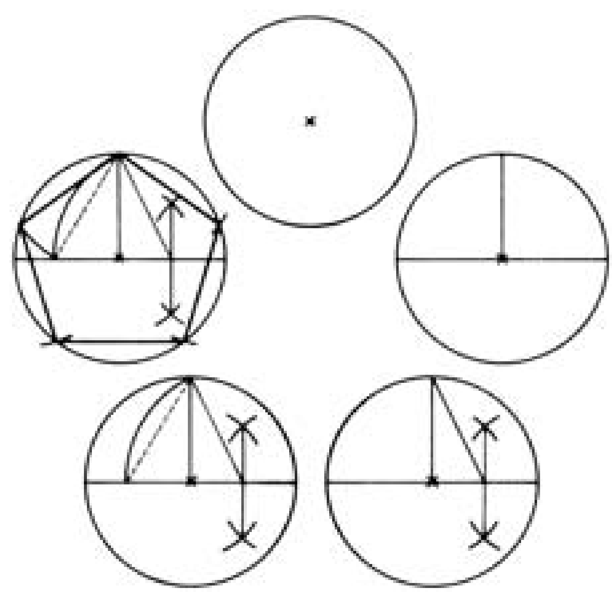
Jacopo da Barbari, pintor que retrató a Luca Pacioli, dispuso un dodecaedro en mármol blanco como lazo de unión mística entre el maestro de burda saya y su autorretrato con rico jubón veneciano. La tradición pitagórica vio en el dodecaedro las propiedades más sorprendentes en los órdenes matemático, físico y místico. "Símbolo geométrico de valor insigne, el dodecaedro construido en base al número de oro (y a partir del pentágono, cuyo poder benéfico es conocido) es la forma más rica en enseñanzas eurítmicas, cosmogónicas y metafísicas", en palabras de Léonard Saint-Michel.[36]

[35] Platón, *op. cit.*, p. 691.
[36] Jean Chevalier y Alain Gheerbrant, *op. cit.*, p. 426; *apud.* Léonard Saint-Michel, *Lettres d'Humanité*, París, X, p. 111.

El cubo, por su parte, simboliza el mundo material y el conjunto de los cuatro elementos; por su sólido asentamiento, es tenido por símbolo de la estabilidad; por ello se encuentra a menudo en la base de los tronos. El cubo, cuadrado del cuadrado, significa lo mismo en el mundo de los volúmenes que el cuadrado en el de las superficies.[37]

Trazo del pentágono regular

1. Trazar un círculo de radio libre a partir del centro elegido con el compás.
2. Trazar el diámetro horizontal del círculo, y el perpendicular.
3. Dividir el radio en dos partes iguales.
4. Por el punto medio del radio levantar una línea hasta el extremo del diámetro opuesto.
5. Haciendo centro en el punto medio del radio, llevar la diagonal del punto anterior sobre el diámetro horizontal.



[37] *Ibidem*, p. 384.

6. Trazar la línea que une el vértice del diámetro vertical con el punto determinado por el arco anterior en el horizontal.
7. Haciendo centro en el vértice del diámetro vertical, llevar esta medida al círculo. El arco trazado determina el lado del pentágono regular exacto.

Epílogo

Es indudable que un tema tan vasto y apasionante como éste no se agota en pocas páginas. El lego que desee profundizar en él, puede consultar una extensa bibliografía fácil de encontrar en las obras referidas. Sin embargo, éste ha sido un intento por desmitificar un asunto que con frecuencia se considera propio del esoterismo, muy oscuro para el común de los estudiosos. En esta lamentable visión han confluido dos factores que se difunden desde las aulas de no pocas escuelas de arte y arquitectura: que el número de oro es cosa del pasado y que es propio de trasnochados.

Debe señalarse, con todo énfasis y claridad, que el uso de la sección áurea o de cualquier otro sistema de proporcionamiento armónico nunca será sustituto de la creatividad. No es sino una herramienta que, bien usada, produciría obras de proporciones más amables y en consonancia con el cosmos. A los creadores y estudiosos que tengan un poco de paciencia, ansia de conocimiento y humildad van dirigidas estas líneas.

Es nuestro deseo que se haya puesto de manifiesto que la sección dorada ha sido y puede seguir siendo un sistema válido de dimensionamiento armónico para que cada vez mayor número de creadores se acerquen a él y abreven de su “magia”, a la vez que una herramienta para el análisis de edificios y objetos del pasado. Un entorno más amable y un mejor conocimiento del proceso creativo serían acaso los resultados.